N. PISKUNOV

cálculo diferencial e integral

tomo I

Editorial  Mir Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

N. PISKUNOV

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

3ª edición

TOMO

I

EDITORIAL MIR · MOSCU

Traducido del ruso por el ingeniero
K. MEDKOV

(на испанском языке)

Impreso en la URSS

INDICE

CAPITULO III. DERIVADA Y DIFERENCIAL

CAPITULO IV. TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

CAPITULO V. ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

CAPITULO VI. CURVATURA DE UNA CURVA

CAPITULO VII. NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

CAPITULO VIII. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CAPITULO IX. APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRIA DEL ESPACIO

CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

PREFACIO

La presente obra es la primera versión al idioma español y le sirve de base la séptima edición en ruso.

En esta versión el autor introdujo una serie de suplementos y modificaciones que contribuyen a la mejor asimilación del curso.

Todo el curso está dividido en dos tomos: el primero incluye los capítulos I-XII; el segundo, XIII-XIX.

Los dos primeros capítulos del tomo I, «Número, Variable, Función» y «Límite, Continuidad de la función», están escritos en la forma más breve posible. Algunos problemas que habitualmente se analizan en relación con estas nociones, en el curso dado, sin perjudicar su comprensión, se examinan en capítulos posteriores. Esto da la oportunidad de pasar, cuanto antes posible, al estudio de la noción principal de cálculo diferencial, la derivada, lo que requieren otras asignaturas de la enseñanza superior (la experiencia pedagógica del autor dicta esta distribución del material).

Con el fin de facilitar a los estudiantes la obtención de los conocimientos matemáticos necesarios para el estudio de las disciplinas relacionadas con las máquinas calculadoras y sistemas automáticos (que se estudian actualmente en los centros de enseñanza técnica superior), en el segundo tomo están detalladamente expuestos los siguientes temas: «Integración numérica de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones diferenciales», «Integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales», «Noción de la teoría de la estabilidad de Liapunov», «Operador de Hamilton», «Integral de Fourier», etc.

En particular, se ha aumentado el número de problemas que se dan junto con sus soluciones; también se introdujeron varios problemas de elevada dificultad cuya solución requiere el conocimiento más profundo sobre la materia. Los problemas y ejemplos, como también sus soluciones, están elegidos para cada tema de tal forma que contribuyan a la mejor comprensión del curso, circunstancia que además hace el libro más cómodo para aquellas personas que quieren estudiar las matemáticas individualmente y, en particular, para los estudiantes por correspondencia.

En conclusión, expreso mi profunda gratitud a la Editorial Mir por la traducción y publicación de esta mi obra.

N. PISKUNOV

CAPITULO I

NUMERO. VARIABLE. FUNCION

§ 1. NUMEROS REALES. REPRESENTACION DE NUMEROS REALES POR MEDIO DE PUNTOS EN EL EJE NUMERICO

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es el número. El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo.

Los números enteros y fraccionarios, tanto positivos como negativos, así como el número cero, se llaman *números racionales.* El número racional puede expresarse como la razón $\frac{p}{q}$ de dos números enteros p y q. Por ejemplo:

$$\frac{5}{7}; \quad 1,25=\frac{5}{4}.$$

En particular, el número entero p se puede considerar como la razón de dos números enteros $\frac{p}{1}$, por ejemplo:

$$6=\frac{6}{1}; \quad 0=\frac{0}{1}.$$

Los números racionales pueden representarse por fracciones periódicas finitas o por indefinidas. Los números en forma de fracciones decimales indefinidas no periódicas, se denominan *números irracionales*; por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$, etc.

La reunión de los números racionales e irracionales se denomina conjunto de números reales. Estos se ordenan según su magnitud, es decir, que para cualquier par de números reales x e y existe una correlación, y sólo una, de las siguientes:

$$x<y, \quad x=y, \quad x>y.$$

Los números reales se pueden expresar por medio de puntos en el eje numérico. Se llama *eje numérico* a una recta infinita en la cual están determinados:

— un punto O que se denomina origen;
— una dirección positiva que se indica con una flecha;
— una escala para medir longitudes.

En general dispondremos el eje numérico en posición horizontal, considerando positiva la dirección hacia la derecha del punto O (origen).

Si el número x_1 es positivo, se representa por el punto M_1. Este se situará a la derecha del punto O a una distancia $OM_1 = x_1$; si el número x_2 es negativo, estará representado por el punto M_2. Este estará situado a la izquierda del punto O, a una distancia $OM_2 = -x_2$ (fig. 1). El punto O representa el número cero. Es evidente que cada

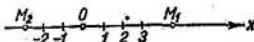


Fig. 1.

número real está representado por un punto en el eje numérico. Dos números reales diferentes están representados en el eje por dos puntos distintos. Es decir, cada punto del eje numérico representa un solo número real, ya sea racional o irracional.

Así pues, entre todos los números reales y puntos del eje numérico existe una correspondencia biunívoca: a cada número le corresponde un solo punto que lo representa en el eje numérico, y recíprocamente, a cada punto corresponde un sólo número. Entonces, «número x» y «punto x» son sinónimos y así los utilizaremos en este manual.

Aceptemos, sin demostración, esta importante propiedad del conjunto de números reales: *entre dos números reales arbitrarios siempre se pueden hallar números, tanto racionales como irracionales.* En lenguaje geométrico esta propiedad se enunciará así: *entre dos puntos arbitrarios del eje numérico siempre podrán situarse puntos, tanto racionales como irracionales.*

Como conclusión, enunciaremos el siguiente teorema que nos servirá, en algún sentido, de «puente entre la teoría y la práctica»:

Teorema. *Todo número irracional α se puede expresar con cualquier grado de precisión por medio de números racionales.*

En efecto, siendo el número irracional $\alpha > 0$, calculemos α con un error no mayor de $\frac{1}{n}$ $\left(\text{por ejemplo, de } \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \text{ etc.}\right)$.

Cualquiera que sea el número α, está comprendido entre dos números enteros consecutivos N y $N+1$. Dividamos el segmento comprendido entre N y $N+1$ en n partes, entonces el número α resultará comprendido entre los números racionales $N+\frac{m}{n}$ y

$N+\frac{m+1}{n}$. Dado que la diferencia entre estos números es $\frac{1}{n}$, cada uno de ellos expresa α con un grado de precisión predeterminado: el primero por defecto, y el segundo por exceso.

Ejemplo: El número irracional $\sqrt{2}$ se expresa por medio de números racionales:

1,4 y 1,5: con un error no mayor de $\frac{1}{10}$;

1,41, y 1,42: con error no mayor de $\frac{1}{100}$;

1,414 y 1,415: con un error no mayor de $\frac{1}{1000}$, etc.

§ 2. VALOR ABSOLUTO DEL NUMERO REAL

Introduzcamos el concepto de valor absoluto del número real. Este concepto es imprescindible para continuar adelante.

Definición. Un número real no negativo, que satisface las condiciones:

$$|x| = x, \text{ si } x \geqslant 0;$$
$$|x| = -x, \text{ si } x < 0.$$

se llama valor absoluto (o módulo) de un número real x (su notación es $|x|$).

Ejemplos: $|2|=2$; $|-5|=5$; $|0|=0$.

De la definición se deduce que para cualquier número x se verifica la correlación $x \leqslant |x|$.

Examinemos algunas propiedades de los valores absolutos.

1. *El valor absoluto de la suma algebraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos:*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Demostración. Sea $x + y \geqslant 0$. Entonces:

$|x+y| = x+y \leqslant |x| + |y|$ (ya que $x \leqslant |x|$ e $y \leqslant |y|$).

Supongamos ahora que $x + y < 0$. Entonces:

$$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|,$$

como se trataba de demostrar.

Esta demostración se puede generalizar fácilmente para cualquier número de sumandos.

Ejemplos:

$$|-2+3| < |-2|+|3| = 2+3 = 5 \quad ó \quad 1 < 5;$$
$$|-3-5| = |-3|+|-5| = 3+5 = 8 \quad u \quad 8 = 8.$$

2. *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es menor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo*:

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

Demostración. Supongamos que $x - y = z$. Entonces $x = y + z$, y según lo demostrado anteriormente, se tiene:

$$|x| = |y + z| \leqslant |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

de donde:

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

como se trataba de demostrar.

3. *El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores*:

$$|xyz| = |x|\,|y|\,|z|.$$

4. *El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor*:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Las dos últimas propiedades provienen directamente de la definición de valor absoluto.

§ 3. MAGNITUDES VARIABLES Y CONSTANTES

Al medir magnitudes físicas: tiempo, longitud, área, volumen, masa, velocidad, presión, temperatura, etc., se obtienen sus valores numéricos. Las matemáticas tratan del estudio de las magnitudes, haciendo abstracción de su contenido concreto. Es por ello que, al hablar de magnitudes, tendremos en cuenta, en lo sucesivo, sus valores numéricos. Hay fenómenos en que algunas magnitudes van cambiando, es decir, alteran su valor numérico y otras lo mantienen constante. Por ejemplo, en el movimiento uniforme de un punto varían el tiempo y la distancia, mientras que la velocidad permanece constante.

Magnitud variable, o simplemente variable, es la que puede adquirir distintos valores numéricos. La magnitud, cuyo valor numérico no se altera, se denomina *constante*. En adelante, las variables se designarán con las letras, x, y, z, u . . ., etc., y las magnitudes constantes con las letras a, b, c . . ., etc.

Observación. En matemáticas, la constante se considera con frecuencia como un caso particular de una magnitud variable cuyos valores numéricos son todos iguales.

Conviene tener en cuenta que, en condiciones físicas concretas, una misma magnitud puede ser constante en un fenómeno y variable en otro. Por ejemplo, la velocidad en el movimiento uniforme es una magnitud constante y en el movimiento uniformemente acelerado, una magnitud variable.

Las magnitudes cuyo valor numérico permanece invariable en cualquier fenómeno se denominan *constantes absolutas*. Por ejemplo, la razón de la longitud de la circunferencia y su diámetro es una magnitud constante, llamada $\pi \approx 3,14159$.

Más adelante veremos que el concepto de variable es fundamental en el cálculo diferencial e integral. Federico Engels escribe en «Dialéctica de la naturaleza»: «El punto de viraje de las matemáticas fue la magnitud variable de Descartes. Esto introdujo en las matemáticas el movimiento y, con él, la dialéctica y también, por tanto, y *necesariamente*, el cálculo diferencial e integral».

§ 4. CAMPO DE VARIACION DE LA MAGNITUD VARIABLE

Una magnitud variable puede tomar diversos valores numéricos. Según el problema que se considere, el conjunto de estos valores puede ser también diferente. Por ejemplo, la temperatura del agua, al calentarla en condiciones normales, variará desde 15-18° C hasta

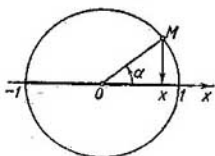


Fig. 2.

el punto de ebullición; es decir, hasta 100° C. La variable $x = \cos \alpha$ puede tomar todos los valores comprendidos entre -1 y $+1$.

Los valores de una magnitud variable se representan geométricamente por medio de puntos en el eje numérico. Por ejemplo, los valores de la variable $x = \cos \alpha$ son representados por un conjunto de puntos del segmento en el eje numérico, desde -1 hasta $+1$, incluyendo estos puntos, para todos los valores de α (fig. 2).

Definición. El conjunto de todos los valores numéricos de la magnitud variable se denomina *campo de variación* de la variable.

Determinemos los siguientes campos de variación de la variable que con frecuencia aparecerán más adelante.

Recibe el nombre de *intervalo* el conjunto de todos los valores numéricos de x comprendidos entre dos números dados a y b $(a < b)$, a excepción de los extremos, es decir, a y b no entran en el conjunto analizado de números. La notación del intervalo es: (a, b) o, mediante las desigualdades, $a < x < b$.

El conjunto de todos los valores numéricos de x comprendidos entre los números dados a y b, incluidos estos, es decir, a y b que entran en el conjunto analizado se llama *segmento*. La notación del segmento es: $[a, b]$, o, mediante las desigualdades, $a \leqslant x \leqslant b$. A veces el segmento recibe el nombre de *intervalo cerrado*.

En el caso de que uno de los números, a o b (a, por ejemplo), se una al intervalo, y el otro no, se obtiene un *intervalo semicerrado*, que puede ser expresado por las desigualdades $a \leqslant x < b$ y cuya notación es $[a, b)$. Si se une al intervalo el número b, excluyéndose a, se obtiene el intervalo semicerrado $(a, b]$, que puede expresarse por medio de las desigualdades

$$a < x \leqslant b.$$

Si la variable x adquiere todos los valores posibles, mayores que a, el intervalo se representa por $(a, +\infty)$ y se determina por las desigualdades convencionales

$$a < x < +\infty.$$

De esta misma manera se determinan los intervalos infinitos y los infinitos semicerrados, que son dados por las desigualdades convencionales:

$$a \leqslant x < +\infty; \quad -\infty < x < c; \quad -\infty < x \leqslant c; \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ejemplo: El campo de variación de la variable $x = \cos \alpha$, para cualesquiera valores de α, es un segmento $[-1, 1]$ que se determina por las desigualdades $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Las definiciones arriba citadas pueden formularse también utilizando el concepto «punto» en lugar del concepto «número». Por ejemplo:

El conjunto de todos los puntos x comprendidos entre los puntos dados a y b (*extremos del segmento*), cuando estos pertenecen al conjunto considerado, se llama *segmento*.

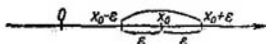


Fig. 3.

El intervalo arbitrario (a, b) que contiene un punto dado x_0, es decir, el intervalo (a, b) cuyos extremos satisfacen la condición $a < x_0 < b$, se denomina *vecindad* de este punto. Con frecuencia

ocurre que el intervalo (a, b) es considerado como vecindad (a, b) del punto x_0 en que x_0 es el centro. En este caso, el punto x_0 recibe el nombre de *centro de la vecindad*; la magnitud $\frac{b-a}{2}$ se denomina *radio de la vecindad*. La fig. 3 representa la vecindad $(x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del punto x_0, cuyo radio es ε.

§ 5. VARIABLE ORDENADA. VARIABLES CRECIENTES Y DECRECIENTES. VARIABLE ACOTADA

Por convención, una variable x es *ordenada*, si se conoce su campo de variación y se puede precisar para cada par de sus valores, cuál de ellos es anterior y cuál posterior. Aquí, los conceptos «anterior» y «posterior» no se hallan relacionados con el tiempo, sirviendo sólo como el método de ordenación de los valores de la variable, es decir, el establecimiento de un cierto orden para los valores correspondientes de esta variable.

La sucesión numérica $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k \ldots$, puede considerarse como caso particular de una variable ordenada, donde, siendo $k' < k$, el valor $x_{k'}$ es anterior y el valor x_k posterior, sin dar importancia cuál de estos dos valores sea mayor.

Definición 1. La variable se denomina *creciente*, si cada su valor posterior es mayor que el anterior. Por el contrario, si cada valor posterior es menor que el anterior, la variable se denomina *decreciente*.

Las variables crecientes y decrecientes reciben el nombre de monótonas.

Ejemplo: Al duplicar el número de lados de un polígono regular inscrito en un círculo, el área s de este polígono es una variable creciente. Si duplicamos el número de lados de un polígono regular circunscrito alrededor de un círculo, su área es una variable decreciente. Obsérvese que no toda variable ha de ser forzosamente creciente o decreciente. Por ejemplo, la variable $x = \operatorname{sen} \alpha$ no es monótona, siendo α una magnitud creciente en el segmento $[0, 2\pi]$. Esta crece, al principio, de 0 a 1 y disminuye después de 1 a -1, para luego crecer de nuevo de -1 a 0.

Definición 2. La variable x se denomina magnitud *acotada*, si existe un número constante $M > 0$ tal que, a partir de cierto valor, todos los posteriores satisfagan la condición.

$$-M \leqslant x \leqslant M, \text{ es decir, } |x| \leqslant M.$$

Es decir, una variable se llama acotada, si se puede indicar un segmento $[-M, M]$ tal que, a partir de cierto valor de la misma, todos sus valores posteriores pertenezcan al segmento indicado. Sin embargo, no hay que pensar que la variable tome necesariamente todos los valores del segmento $[-M, M]$. Por ejemplo, una variable

que toma diferentes valores racionales en el segmento $[-2, 2]$, es acotada. Sin embargo, ésta no toma en este segmento valores irracionales.

§ 6. FUNCION

Al estudiar diversos fenómenos de la naturaleza y resolver problemas técnicos, y, por consiguiente, matemáticos, surge la necesidad de examinar la variación de una magnitud en dependencia de la variación de otra. Por ejemplo, al estudiar el movimiento, el espacio recorrido se considera como una variable que cambia en dependencia de la variación del tiempo. De este modo el espacio recorrido es *función* del tiempo.

Veamos otro ejemplo. Es sabido que el área de un círculo se expresa por: $Q = \pi R^2$. Si el radio R toma diversos valores numéricos, el área Q tomará también valores diferentes. Como vemos, la variación de una magnitud causa la variación de la otra. En el ejemplo citado, el área Q es función del radio R. Establezcamos el concepto «función».

Definición 1. Si a cada valor de la variable x, perteneciente a cierto campo, le corresponde un sólo valor determinado de otra variable y, entonces ésta será función de x, y podemos escribir simbólicamente:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

La variable x se denomina *variable independiente* o *argumento*. La dependencia que existe entre las variables x e y se llama *funcional*. La letra «f» que entra en la notación simbólica de una dependencia funcional $y = f(x)$ significa que han de realizarse ciertas operaciones con el valor x para obtener el de y. En lugar de $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, etc., a veces se emplea $y = y(x)$, $u = u(x)$, etc., es decir, las letras y, u, etc., representan tanto variable dependiente, como símbolo del conjunto de operaciones que habrán de realizarse con x.

La notación $y = C$, donde C es una constante, significa una función, cuyo valor es constante e igual a C, cualesquiera que sean los valores de x.

Definición 2. El conjunto de los valores de x para los cuales se determinan los valores de la función y, en virtud de la ley $f(x)$, se llama *dominio de definición de la función*.

Ejemplo 1. La función $y = \operatorname{sen} x$ está definida para todos los valores de x. Por lo tanto, su dominio de definición será el intervalo infinito:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Observación 1. Si existe una dependencia funcional entre dos variables x e $y = f(x)$ y si éstas se consideran como variables orde-

nadas, de los dos valores de la función $y^* = f(x^*)$ e $y^{**} = f(x^{**})$, correspondientes a dos valores del argumento x^* y x^{**}, será posterior el valor de la función que corresponda al valor posterior del argumento. De aquí se deduce la siguiente definición.

Definición 3. La función $y = f(x)$ se llama *creciente*, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. De modo análogo se define la función *decreciente*.

Ejemplo 2. La función $Q = \pi R^2$ es creciente cuando $0 < R < +\infty$, puesto que a un valor mayor de R le corresponde un valor mayor de Q.

Observación 2. A veces en la definición del concepto «función» se admite que a cada valor de x, perteneciente a un determinado campo, le corresponde no un sólo valor de y, sino varios valores, e, incluso un número infinito de valores. En este caso la función se denomina multiforme, a diferencia de la función definida anteriormente, y que lleva el nombre de función uniforme. En lo sucesivo tendremos en cuenta sólo las funciones uniformes. Si nos encontramos con una función multiforme haremos una indicación especial.

§ 7. FORMAS DE EXPRESION DE FUNCIONES

I. Forma tabular

En este caso la anotación de los valores del argumento se efectúa en cierto orden: $x_1, x_2, \ldots x_n$. De la misma manera se escriben los valores correspondientes de la función $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

x	x_1	x_2	. . . . . .	x_n
y	y_1	y_2	. . . . . .	y_n

De este tipo son las tablas de las funciones trigonométricas, las de logaritmos, etc.

Las tablas que señalan la dependencia funcional que existe entre magnitudes medidas pueden aparecer también, como resultado del estudio experimental de fenómenos. Por ejemplo, en una estación meteorológica, midiendo en un día determinado la temperatura del aire, se obtiene la siguiente tabla:

Valor de la temperatura T (en grados) en función del tiempo t (en horas)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	−1	−2	−2	−0,5	1	3	3,5	4

Esta tabla determina T como función de t.

II. Forma gráfica

Dado en el plano del sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas un conjunto de los puntos $M(x, y)$ tal que ningún par de puntos se halla sobre una recta paralela al eje Oy, podemos decir

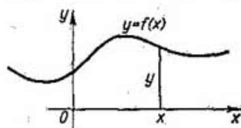


Fig. 4.

que el conjunto mencionado determina una función uniforme $y = f(x)$. Las abscisas de los puntos constituyen los valores del argumento y las ordenadas correspondientes, los de la función (fig. 4).

El conjunto de puntos del plano (xOy), cuyas abscisas representan valores de la variable independiente y las ordenadas, los valores correspondientes de la función, se llama *gráfica* de la función dada.

III. Forma analítica

Primero expliquemos el concepto de «expresión analítica». Se da el nombre de *expresión analítica* a la representación simbólica de un conjunto de ciertas operaciones matemáticas que se realizan en una sucesión determinada con cifras y letras que designan magnitudes constantes y variables. Se entiende por conjunto de operaciones matemáticas no sólo las operaciones elementales (adición, sustracción, extracción de raíz, etc.), sino también las que iremos determinando a medida que avancemos en el curso.

Ejemplos de expresión analítica son:

$$x^4 - 2; \quad \frac{\log x - \operatorname{sen} x}{5x^2 + 1}; \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}, \text{ etc.}$$

Si la dependencia funcional $y = f(x)$ es tal que f designa una expresión analítica, se dice que la función y de x está *expresada analíticamente*. Ejemplos de funciones expresadas analíticamente son:

1) $y = x^4 - 2$; 2) $y = \frac{x+1}{x-1}$; 3) $y = \sqrt{1-x^2}$; 4) $y = \text{sen}\ x$; 5) $Q = \pi R^2$, etc.

Aquí, las funciones están expresadas analíticamente por medio de una fórmula (se entiende por fórmula la igualdad de dos expresiones analíticas). En estos casos podemos hablar de dominio natural de definición de la función.

El dominio natural de definición de una función expresada analíticamente se compone del conjunto de valores de x para los cuales la expresión analítica, o segundo miembro de la igualdad, adquiere un valor determinado. Así, por ejemplo, como dominio natural de definición de la función $y = x^4 - 2$ tendremos el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, ya que la función está definida para todos los valores de x. La función $y = \frac{x+1}{x-1}$ está definida para todos los valores de x, menos para $x = 1$, pues, este valor reduce el denominador a cero. Para la función $y = \sqrt{1-x^2}$, el dominio natural de definición está constituido por el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, etc.

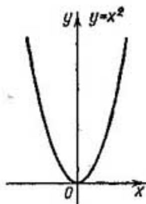


Fig. 5.

Observación. A veces surge la necesidad de examinar no todo el dominio natural de definición de la función, sino parte de él. Así, la dependencia del área Q de un círculo de radio R se determina por la función $Q = \pi R^2$. Al considerar esta fórmula geométrica aparece en calidad de dominio de definición el intervalo infinito $0 < R < +\infty$, mientras que el dominio natural de definición de la función dada es el intervalo infinito $-\infty < R < +\infty$.

Si la función $y = f(x)$ viene expresada analíticamente, puede representarse de manera gráfica en el plano de coordenadas xOy. Así, por ejemplo, la gráfica de la función $y = x^2$ es la parábola representada en la figura 5.

§ 8. FUNCIONES ELEMENTALES FUNDAMENTALES. FUNCIONES ELEMENTALES

Las *funciones elementales fundamentales* expresadas analíticamente son las siguientes:

1. *Función potencial*: $y = x^{\alpha}$, donde α es un número real *

*) Siendo α un número irracional, esta función se calcula, tomando logaritmos y antilogaritmos: $\log y = \alpha \log x$, suponiendo $x > 0$.

II. *Función exponencial:* $y = a^x$, en la que a es un número positivo, diferente de la unidad.

III. *Función logarítmica:* $y = \log_a x$ en la cual la base a es un número positivo diferente de la unidad.

IV. *Funciones trigonométricas:*

$$y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x.$$

$$y = \operatorname{cotg} x,\ y = \sec x,\ y = \operatorname{cosec} x.$$

V. *Funciones trigonométricas inversas:*

$$y = \operatorname{arcsen} x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,$$

$$y = \operatorname{arccotg} x,\ y = \operatorname{arcsec} x,\ y = \operatorname{arccosec} x.$$

Examinemos los dominios de definición y las gráficas de las funciones elementales fundamentales.

Función potencial. $y = x^{\alpha}$.

1. α es un número entero positivo. La función está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. En este caso, para ciertos

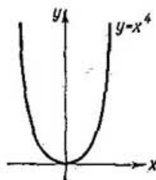


Fig. 6.

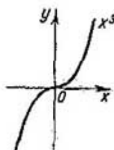


Fig. 7.

valores de α las gráficas de la función toman las formas que se exponen en las figuras 6 y 7.

2. α es un número entero negativo. En este caso, la función está definida para todos los valores de x, excepto para $x = 0$. Las gráficas de la función para ciertos valores de α se exponen en las figuras 8 y 9.

En las figuras 10, 11, 12 tenemos las gráficas de la función potencial cuyos valores de α son números racionales fraccionarios.

Función exponencial, $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Esta función está definida para todos los valores de x. Su gráfica está representada en las figuras 13 y 14.

Función logarítmica, $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

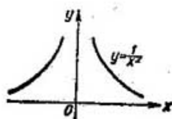


Fig. 8.

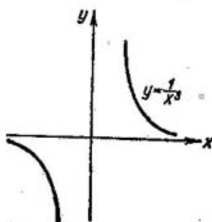


Fig. 9.

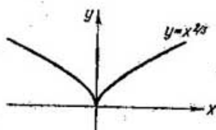


Fig. 10.

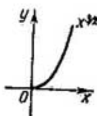


Fig. 11

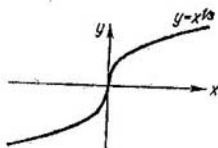


Fig. 12.

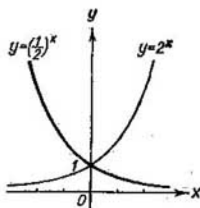


Fig. 13.

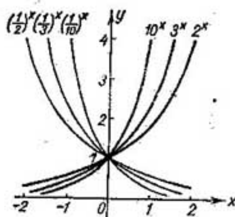


Fig. 14.

Esta función está definida para los valores de $x > 0$. Su gráfica se muestra en la figura 15.

Funciones trigonométricas. En las fórmulas $y = \operatorname{sen} x$, etc., la variable independiente x se expresa en radianes. Todas las funciones trigonométricas indicadas son periódicas. Su definición general es como sigue:

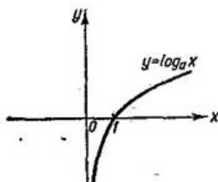


Fig. 15.

Definición 1. La función $y = f(x)$ se denomina *periódica*, si existe un número constante C tal que, al sumarlo (o restarlo) al argumento x, el valor de la función no se altere, $f(x + C) = f(x)$. El valor mínimo de este número constante se denomina *período* de la función; en lo sucesivo lo designaremos por $2l$. Según la definición, la función $y = \operatorname{sen} x$ es periódica, cuyo período es igual a 2π: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$. El período de $\cos x$ es también igual a 2π. Del mismo modo, el período de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ es igual a π.

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ están definidas para todos los valores de x. Las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \sec x$ están definidas

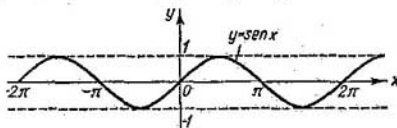


Fig. 16.

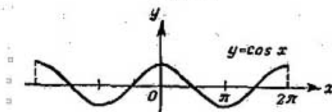


Fig. 17.

en todos los puntos, excepto $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$; las funciones $y = \operatorname{cotg} x$ e $y = \operatorname{cosec} x$ están definidas para todos los valores de x, excepto para $x = k\pi$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$.

Las gráficas de las funciones trigonométricas se muestran en las figuras 15-19. Más adelante examinaremos detalladamente las funciones trigonométricas inversas.

Introduzcamos ahora el concepto de función de función. Si y es una función de u y u depende, a su vez, de una variable x, entonces, y también depende de x.

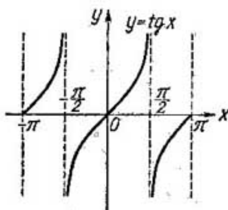


Fig. 18.

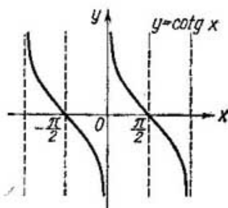


Fig. 19.

Si $y = F(u)$ y $u = \varphi(x)$, la función y de x será:

$$y = F[\varphi(x)].$$

Esta función se denomina *función de función* o *función compuesta.*

Ejemplo 1. Sea $y = \operatorname{sen} u$, $u = x^2$. La función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ es una función compuesta de x.

Observación. El dominio de definición de la función $y = F[\varphi(x)]$ está constituido por todo el dominio de la función $u = \varphi(x)$, o bien por la parte de éste en que se definen los valores de u que no salgan fuera del dominio de la función $F(u)$.

Ejemplo 2. El dominio de la función $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$) es el segmento $[-1, 1]$, ya que $u < 0$ y $|x| > 1$ y, por lo tanto, la función $\sqrt{u}$ no está definida para estos valores de x (aunque la función $u = 1 - x^2$ está definida para todos los valores de x). La gráfica de esta función se representa como la mitad superior de la circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, siendo el radio de la misma igual a la unidad.

La operación «función de función» puede efectuarse no sólo una vez, sino cualquier número de veces. Por ejemplo, la función $y = \ln[\operatorname{sen}(x^2 + 1)]$ se obtiene, efectuando las siguientes operaciones (es decir, determinando las siguientes funciones):

$$v = x^2 + 1, \quad u = \operatorname{sen} v, \quad y = \ln u.$$

Definamos ahora el concepto de función elemental.

Definición 2. La función que puede ser dada por la fórmula de la forma $y = f(x)$, donde el segundo miembro de la igualdad está compuesto de funciones elementales fundamentales y constantes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción,

multiplicación, división y función de función, se llama *función elemental*.

De está definición se deduce que las funciones expresadas analíticamente son funciones elementales.

Ejemplos de las funciones elementales son:

$$y=\sqrt{1+4\,\text{sen}^2 x}; \quad y=\frac{\log x+4\sqrt[3]{x}+2\,\text{tg}\,x}{10^x-x+10}.$$

Ejemplo de función no elemental:

$y=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ $[y=f(n)]$ es una función no elemental, dado que el número de operaciones que deben efectuarse para calcular y va aumentando a medida que crece n, es decir, el número de operaciones es infinito.

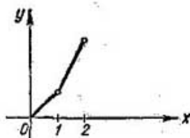


Fig. 20.

Observación. La función expuesta en la figura 20 es elemental aunque viene expresada por dos fórmulas:

$$f(x)=x, \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1; \; f(x)=2x-1, \text{ si } 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Es posible demostrar que esta función puede expresarse con una sola fórmula $y=f(x)$, incluida entre las indicadas en la definición 2. (Véanse los ejemplos 139 al 144 de los ejercicios para el capítulo V).

§ 9. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son funciones algebraicas las funciones elementales siguientes:

I. Función racional entera o polinomio

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números constantes que llamamos coeficientes; n es un entero no negativo, llamado grado del polinomio. Evidentemente, la función indicada está definida para todos los valores de x, es decir, en un intervalo infinito.

Ejemplos: 1. $y=ax+b$ es una función lineal. Si $b=0$, la función lineal $y=ax$ expresa la dependencia proporcional de y respecto a x. Si $a=0$, $y=b$, la función es constante.

2. $y=ax^2+bx+c$, es una función cuadrática.

La gráfica de la función cuadrática es una parábola (fig. 21).
Estas funciones han sido estudiadas detalladamente en el curso de geometría analítica.

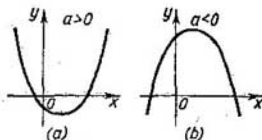


Fig. 21

II. Función racional fraccionaria. Esta función se expresa como la razón de dos polinomios:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Como ejemplo de una función racional fraccionaria puede servir

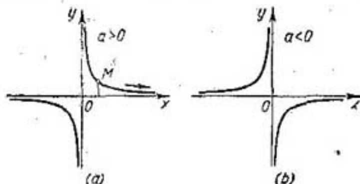


Fig. 22

la función $y = \frac{a}{x}$, que expresa una dependencia inversamente proporcional. Su gráfica se muestra en la figura 22. Es evidente que la función racional fraccionaria está definida para todos los valores de x, excepto para aquellos que reducen el denominador a cero.

III. Función irracional. Si en el segundo miembro de la igualdad $y = f(x)$ se efectúan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y elevación a potencia, siendo los exponentes números racionales, no enteros, la función de y en dependencia de x se llama *irracional*. Son *irracionales* las funciones siguientes:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}; \qquad y = \sqrt{x}, \text{ etc.}$$

Observación 1. No todas las funciones algebraicas están comprendidas en tres tipos de funciones mencionadas. Se denomina *función algebraica* cualquier función $y = f(x)$ que satisfaga una ecuación de la forma

$$P_0(x)\,y^n + P_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0, \qquad (1)$$

donde, $P_0(x)$, $P_1(x)$, . . ., $P_n(x)$ son ciertos polinomios de x.

Se puede demostrar que cada una de las funciones que pertenece a los tres tipos mencionados satisface cierta ecuación de la forma (1); pero no toda función que satisfaga esta ecuación pertenecerá a alguno de los tres tipos denominados.

Observación 2. La función que no es algebraica se llama *transcendente*. Son funciones transcendentes:

$$y = \cos x; \quad y = 10^x, \text{ etc.}$$

§ 10. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

La posición de un punto en el plano se puede determinar por medio del sistema de *coordenadas polares*.

Elijamos en el plano un punto O, que llamaremos *polo* y una recta o *eje polar*, que tiene su origen en el punto O. La posición de

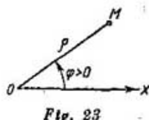


Fig. 23

un punto M en el plano se determina por dos números: ρ y φ. El primero indica la distancia del punto M al polo y el segundo, el valor del ángulo formado por el segmento OM con el eje polar. Para calcular el ángulo φ se considera positiva la dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Los números ρ y φ se denominan *coordenadas polares* del punto M (fig. 23).

El radio vector ρ se considera siempre no negativo. Si el ángulo polar φ varía en los límites $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, a cada punto del plano, a excepción del polo, le corresponde un par determinado de números ρ y φ. En el polo, $\rho = 0$ y φ puede tener cualquier valor.

Determinemos la relación que existe entre las coordenadas polares y las rectangulares o cartesianas. Supongamos que el origen de coordenadas rectangulares coincide con el polo y la dirección positiva del eje Ox, con el eje polar. Veamos ahora la relación que existe entre las coordenadas cartesianas y las polares de un mismo punto.

En la figura 24 se ve:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$ e inversamente $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Observación. Determinando φ hay que tener en cuenta el cuadrante en que se halla el punto y tomar el valor correspondiente de φ.

En el sistema de coordenadas polares la ecuación $\rho = F(\varphi)$ determina una línea.

Ejemplo 1. En coordenadas polares la ecuación $\rho = a$, donde $a = \text{const}$, determina una circunferencia de radio a y centro en el polo. La ecuación

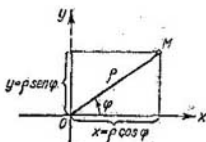


Fig. 24

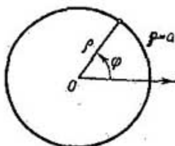


Fig. 25

de la misma circunferencia (fig. 25) en el sistema de coordenadas rectangulares, trazado en la forma expuesta en la figura 24, será:

$$\sqrt{x^2+y^2}=a \text{ ó } x^2+y^2=a^2.$$

Ejemplo 2.

$$\rho = a\varphi, \quad \text{donde} \quad a = \text{const}.$$

Veamos la tabla de valores de ρ para algunos valores de φ:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0{,}78a$	$\approx 1{,}57a$	$\approx 2{,}36a$	$\approx 3{,}14a$	$\approx 4{,}71a$	$\approx 6{,}28a$	$\approx 9{,}42a$	$\approx 12{,}56a$

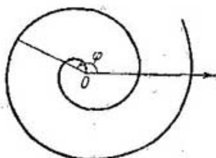


Fig. 26

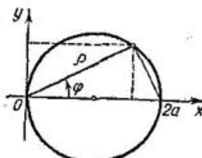


Fig. 27

La curva correspondiente se muestra en la figura 26 y se llama espiral de Arquímedes.

Ejemplo 3.

$$\rho = 2a\cos\varphi.$$

Esta es la ecuación de una circunferencia de radio a y centro en el punto $\rho_0 = a$ y $\varphi = 0$, (fig. 27). Escribamos la ecuación de esta circunferencia en coordenadas rectangulares. Poniendo en esta ecuación $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, obtendremos: $\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, o sea, $x^2+y^2-2ax=0$.

Ejercicios para el capítulo I

1. Dada la función $f(x) = x^2+6x-4$. Comprobar que $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

2. $f(x) = x^2+1$. Calcular los valores:
a) $f(4)$. *Respuesta*: 17. b) $f(\sqrt{2})$. *Respuesta*: 3. c) $f(a+1)$. *Respuesta*: a^2+2a+2. d) $f(a)+1$. *Respuesta*: a^2+2. e) $f(a^2)$. *Respuesta*: a^4+1. f) $[f(a)]^2$. *Respuesta*: a^4+2a^2+1. g) $f(2a)$. *Respuesta*: $4a^2+1$.

3. $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$. Escribir las expresiones: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\frac{1}{\varphi(x)}$. *Respuesta*: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$; $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{3x+5}{1-x}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. Escríbanse las expresiones $\psi(2x)$ y $\psi(0)$. *Respuesta*: $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta$. Comprobar la igualdad $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$. Comprobar la igualdad $\varphi(a)+\varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x) = \log x$; $\varphi(x) = x^3$. Escribir las expresiones: a) $f[\varphi(2)]$. *Respuesta*: $3\log 2$. b) $f[\varphi(a)]$. *Respuesta*: $3\log a$. c) $\varphi[f(a)]$. *Respuesta*: $[\log a]^3$.

8. Hallar el dominio natural de definición de la función $y = 2x^2+1$. *Respuesta*: $-\infty < x < +\infty$.

9. Hallar los dominios naturales de definición de las funciones: a) $\sqrt{1-x^2}$. *Respuesta*: $-1 \leqslant x \leqslant +1$. b) $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$. *Respuesta*: $-3 \leqslant x \leqslant 7$. c) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{x-b}$. *Respuesta*: $-\infty < x < +\infty$ d) $\frac{a+x}{a-x}$. *Respuesta*: $x \neq a$. e) $\operatorname{arcsen}^2 x$. *Respuesta*: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. f) $y = \log x$. *Respuesta*: $x > 0$. g) $y = a^x$ $(a > 0)$. *Respuesta*: $-\infty < x < +\infty$.

Construir las gráficas de las funciones:

10. $y = -3x+5$. 11. $y = \frac{1}{2}x^2+1$. 12. $y = 3-2x^2$. 13. $y = x^2+2x-1$.
14. $y = \frac{1}{x-1}$. 15. $y = \operatorname{sen} 2x$. 16. $y = \cos 3x$. 17. $y = x^2-4x+6$. 18. $y = \frac{1}{1-x^2}$.
19. $y = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 20. $y = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. 21. $y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. 22. $y = \operatorname{cotg}\frac{1}{4}x$.
23. $y = 3^x$. 24. $y = 2^{-x^2}$. 25. $y = \log_2\frac{1}{x}$. 26. $y = x^3+1$. 27. $y = 4-x^3$.

28. $y=\frac{1}{x^2}$. 29. $y=x^4$. 30. $y=x^5$. 31. $y=x^{\frac{1}{2}}$. 32. $y=x^{-\frac{1}{2}}$. 33. $y=x^{\frac{1}{3}}$.
34. $y=|x|$. 35. $y=\log_2|x|$. 36. $y=\log_2(1-x)$. 37. $y=3\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.
38. $y=4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

39. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[-1; 1]$ del modo siguiente:

$$f(x)=1+x \quad \text{para} \quad -1\leqslant x\leqslant 0;$$
$$f(x)=1-2x \quad \text{para} \quad 0\leqslant x<1.$$

40. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[0; 2]$ del modo siguiente:

$$f(x)=x^3 \quad \text{para} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$
$$f(x)=x \quad \text{para} \quad 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Construir las curvas dadas por ecuaciones polares:

41. $\rho=\frac{a}{\varphi}$ (espiral hiperbólica). 42. $\rho=a^{\varphi}$ (espiral logarítmica). 43. $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniscata). 44. $\rho=a(1-\cos\varphi)$ (cardioide). 45. $\rho=a\operatorname{sen} 3\varphi$.

CAPITULO II

LIMITE. CONTINUIDAD DE LA FUNCION

§ 1. LIMITE DE LA MAGNITUD VARIABLE. VARIABLE INFINITAMENTE GRANDE

En este párrafo trataremos de las magnitudes ordenadas que varían de un modo especial, determinado por la expresión «la variable tiende a un límite». A continuación el concepto de límite de la variable desempeñará un papel fundamental ya que con él están relacionados los conceptos fundamentales del análisis matemático: derivada, integral, etc.

Definición 1. El número constante a se denomina *límite* de la variable x, si para cualquier número infinitesimal positivo ε prefijado, se puede indicar tal valor de la variable x, a partir del cual todos los valores posteriores de la misma satisfacen la desigualdad

$$|x-a|<\varepsilon.$$

Si el número a es el límite de la variable x, se dice que x tiende al límite a; su notación es:

$$x \to a \text{ ó } \lim x = a.$$

En términos geométricos la definición de límite puede enunciarse así: el número constante a es el *límite* de la variable x, si para cualquiera vecindad infinitesimal prefijada de radio ε y centro en el punto a, existe un valor de x tal que todos los puntos correspondientes a los valores posteriores de la variable se encuentren dentro de la misma vecindad (fig. 28). Examinemos algunos ejemplos de variables que tienden al límite.

Ejemplo 1. La variable x toma sucesivamente los valores $x_1=1+1$; $x_2=1+\frac{1}{2}$; $x_3=1+\frac{1}{3}$; ...; $x_n=1+\frac{1}{n}$; ...

Comprobemos que esta variable tiene por límite la unidad.

Tenemos:

$$|x_n-1|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}.$$

Para cualquier ε todos los valores posteriores de la variable, a partir de n, donde $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ó $n > \frac{1}{\varepsilon}$, satisfacen la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$, que es lo que se trataba de demostrar.

Observemos que, en este caso, la variable tiende al límite decreciendo al mismo tiempo.

Ejemplo 2. La variable x toma sucesivamente los valores

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}; \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2^3};$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2^4}; \ \ldots; \ x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}; \ \ldots$$

El límite de esta variable es la unidad. En efecto,

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$

Para cualquier ε, a partir de n, que satisface la correlación $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, y de la cual se deduce que

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \log 2 > \log \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ó} \quad n > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2},$$

todos los valores posteriores de x satisfarán la correlación

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

En el caso considerado, la variable tiende al límite «oscilando alrededor de él», es decir, tomando valores unas veces mayores y otras, menores que éste.



Fig. 28

Observación 1. En el capítulo 1, § 3, se ha indicado que la magnitud constante c se considera frecuentemente como una variable cuyos valores son siempre iguales: $x = c$.

Es evidente que el límite de la constante será igual a la misma constante, dado que siempre se cumple la desigualdad $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, independientemente del valor que tenga ε.

Observación 2. De la definición de límite se deduce que una magnitud variable no puede tener dos límites. En efecto, si $\lim x = a$ y $\lim x = b$ $(a < b)$, entonces x debe satisfacer las dos desigualdades simultáneamente: $|x - a| < \varepsilon$ y $|x - b| < \varepsilon$ siendo ε arbitrariamente pequeño, pero esto es imposible, si $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ (fig. 29).

Observación 3. No toda variable tiene límite. Supongamos que la variable x toma sucesivamente los siguientes valores:

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1 - \frac{1}{4}; \quad x_3 = \frac{1}{8}; \ldots; \; x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}};$$

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(fig. 30). Siendo k lo suficientemente grande, el valor x_{2k} y todos los valores posteriores, de subíndices pares, se diferenciarán de la unidad en una cantidad tan pequeña como se quiera, mientras que

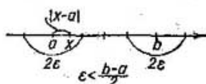


Fig. 29



Fig. 30

el valor siguiente x_{2k+1} y todos los valores posteriores de x, de subíndices impares, irán diferenciándose de cero en una cantidad tan pequeña como se desee. Por tanto, la variable x no tiende al límite.

En la definición de límite se indica que si una variable tiende al límite a, éste debe ser un número constante. Pero el concepto «tiende» se usa también para caracterizar otro tipo de variación de la variable, como veremos en la definición que sigue.

Definición 2. La variable x tiende al infinito, si para cualquier numero positivo M prefijado se puede elegir un valor de x tal que, a partir de él todos los valores posteriores de la variable satisfagan la desigualdad $|x| > M$.

La variable x que tiende al infinito, se denomina *infinitamente grande* y esta tendencia se expresa así: $x \to \infty$.

Ejemplo 3. La variable x que toma los valores:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -3; \; \ldots; \; x_n = (-1)^n n; \; \ldots$$

es infinitamente grande, ya que para cualquier valor de $M > 0$ todos los valores de la variable, a partir de uno de ellos, son mayores en valor absoluto que M.

La variable x «tiende al infinito con signo «más», $x \to +\infty$, si M es un número positivo cualquiera de tal manera que, a partir de cierto valor, todos los valores posteriores de la variable sastifagan la desigualdad $M < x$.

Como ejemplo de una variable que tiende al infinito con signo «más» puede servir la variable x que toma los valores $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, . . ., $x_n = n$.

La variable x tiende al inifinito con signo «menos» $x \to -\infty$, si M es un número positivo cualquiera de tal manera que todos los valores sucesivos de la variable, a partir de alguno de ellos, satisfagan la desigualdad $x < -M$.
Por ejemplo, la variable x, que toma los valores $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, ..., $x_n = -n$, . . ., tiende a $-\infty$.

§ 2. LIMITE DE LA FUNCION

Examinemos algunos casos de variación de una función cuando el argumento x tiende a un límite a o al infinito.

Definición 1. Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida en determinada vecindad del punto a o en ciertos puntos de la misma.
La *función* $y = f(x)$ *tiende al límite* b $(y \to b)$ *cuando* x *tienda a* a $(x \to a)$, si para cada número positivo ε, por pequeño que éste sea, es posible indicar un número positivo δ tal que para todos los valores de x, diferentes de a, que satisfacen la desigualdad* $|x - a| < \delta$, se verificará la desigualdad:

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Si b es el *límite de la función* $f(x)$, cuando $x \to a$, su notación es:

$$\lim_{x \to a} f(x) =$$

o bien $f(x) \to b$, cuando $x \to a$.
Si $f(x) \to b$, cuando $x \to a$, entonces en la gráfica de la función $y = f(x)$ esto se interpreta así (fig. 31): puesto que de la desigualdad $|x - a| < \delta$ se deduce $|f(x) - b| < \varepsilon$, entonces, todos los puntos M en la gráfica de la función $y = f(x)$, correspondientes a los puntos x que se encuentran a una distancia no mayor que δ del punto a, se localizarán dentro de una banda de ancho 2ε, limitada por las rectas $y = b - \varepsilon$ e $y = b + \varepsilon$.

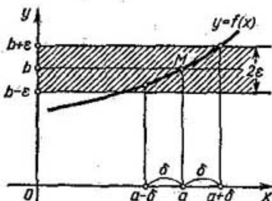


Fig. 31

Observación 1. El límite de la función $f(x)$, cuando $x \to a$, se puede definir también del modo siguiente.

---

*) Aquí se tienen en consideración aquellos valores de x que, satisfaciendo la desigualdad $|x - a| < \delta$, pertenecen al dominio de definición de la función. En adelante, consideraciones de este tipo las encontraremos con frecuencia. Así, al examinar la variación de una función, cuando $x \to \infty$, puede ocurrir que la función esté definida sólo para valores enteros y positivos de x. Por consiguiente, en este caso x tiende al infinito, tomando sólo valores enteros positivos. En lo sucesivo prescindiremos de explicaciones de este tipo.

Supongamos que la variable x está ordenada de tal manera que si

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|,$$

entonces, x^{**} es valor posterior, y x^*, el anterior. Pero si

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \text{ y } \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

entonces $\bar{x}^{**}$ será el valor posterior y $\bar{x}^*$, el anterior.

En otras palabras, de los dos puntos en el eje numérico, será posterior el que esté más cerca del punto a; si son equidistantes será posterior el que se encuentre a la derecha del punto a.

Supongamos que la variable x, ordenada del modo indicado, *tiende al límite* a [$x \to a$ ó $\lim x = a$].

Examinemos ahora la variable $y = f(x)$. En este caso y en lo sucesivo consideraremos que de dos valores de la función, posterior será el que corresponda al valor posterior del argumento.

Si la variable y definida del modo indicado, tiende a un límite b, cuando x tiende a a, escribiremos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

En este caso diremos que la función $y = f(x)$ tiende al límite b, cuando $x \to a$.

Es fácil demostrar que las dos definiciones de límite de la función son equivalentes.

Observación 2. Si $f(x)$ tiende al límite b_1, cuando x tiende a cierto número a de modo que x toma sólo valores inferiores a éste, su notación es $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$, siendo b_1 el *límite de la función* $f(x)$ en *el punto* a *«por la izquierda»*. En caso de que x tome sólo valores mayores que a, la notación será $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$, siendo b_2 el límite de la función en el punto a «por la derecha» (fig. 32).

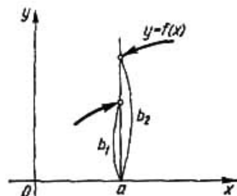


Fig. 32

Se puede demostrar que, si los límites «por la izquierda» y «por la derecha» existen y son iguales, es decir, si $b_1 = b_2 = b$, entonces b será el límite de esta función en el punto a en el sentido que acabamos de exponer. Y recíprocamente, si existe el límite b de la función en el punto a, existen también límites de la función en el punto a «por la derecha» y «por la izquierda» que son iguales.

Ejemplo 1. Demostremos que $\lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7$. En efecto, supongamos que está dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$; para que se cumpla la desigualdad

$$|(3x+1)-7| < \varepsilon,$$

es necesario que sean cumplidas las desigualdades siguientes:

$$|3x-6| < \varepsilon, \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x-2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De este modo, cualquiera que sea ε, para todos los valores de x que satisfagan la desigualdad $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$. El valor de la función $3x+1$ se diferenciará de 7 en una magnitud menor que ε. Esto significa que 7 es el límite de la función cuando $x \to 2$.

Observación 3. Para que exista el límite de la función, cuando $x \to a$, no es necesario que la función esté definida en el punto $x = a$. Cuando se busca el límite, se examinan los valores de la función, diferentes de a, en la vecindad del punto a. Examinemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Demostremos que $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Aquí la función $\frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida en el punto $x = 2$.

Es necesario demostrar que, siendo ε un número cualquiera arbitrario, se encontrará tal δ que se cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

a condición de que $|x-2| < \delta$. Pero cuando $x \neq 2$, la desigualdad (1) es equivalente a:

$$\left| \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4 \right| = |(x+2)-4| < \varepsilon.$$

ó

$$|x-2| < \varepsilon. \tag{2}$$

Así pues, siendo ε arbitrario, la desigualdad (1) se verificará, si se cumple la desigualdad (2) (aquí, $\delta = \varepsilon$).

Esto significa que la función dada tiene por límite el número 4, cuando $x \to 2$.

Examinemos algunos casos de variación de la función, cuando $x \to \infty$.

Definición 2. *La función $f(x)$ tiende al límite b cuando $x \to \infty$,* si para cualquier número positivo ε arbitrariamente pequeño existe un número positivo N tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, se cumpla la desigualdad

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Ejemplo 3. Demostremos que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1, \text{ o bien } \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Para ello es necesario demostrar que siendo ε un número arbitrario se cumplirá la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon, \tag{3}$$

siempre que $|x|>N$, dependiendo N de la elección de ε.

La desigualdad (3) es equivalente a otra: $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$, que se cumplirá a condición de que

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}=N.$$

Esto significa que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ (fig. 33).

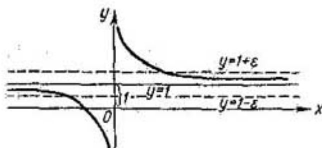


Fig. 33

Conociendo el sentido de los símbolos $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, es evidente el significado de las expresiones:

«$f(x)$ tiende a b cuando $x\to+\infty$» y

«$f(x)$ tiende a b cuando $x\to-\infty$»,

las cuales simbólicamente se escriben así:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b.$$

§ 3. FUNCION QUE TIENDE AL INFINITO. FUNCIONES ACOTADAS

Hemos examinado los casos en los que la función $f(x)$ tiende a cierto límite b, cuando $x\to a$ ó $x\to\infty$.

Examinemos ahora el caso cuando la función $y=f(x)$ tiende al infinito, para una determinada forma de variación del argumento.

Definición 1. La función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x\to a$, es decir, es una magnitud *infinitamente grande* cuando $x\to a$, si para cualquier número positivo M, por grande que sea, existe un valor $\delta>0$ tal que para todos los valores de x diferentes de a y que satisfacen la condición $|x-a|<\delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x)|>M$.

Si $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to a$, se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

ó $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$.

Si $f(x)$ tiende al infinito, cuando $x \to a$, tomando sólo valores positivos, o bien sólo negativos, se escribe, respectivamente: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ó $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Ejemplo 1. Demostremos que $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

En efecto, para cualquier $M > 0$ tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M,$$

siempre que:

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}, \quad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta.$$

La función $\frac{1}{(1-x)^2}$ toma sólo valores positivos (fig. 34).

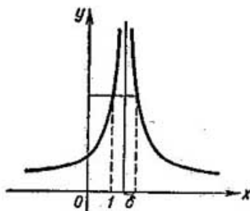


Fig. 34

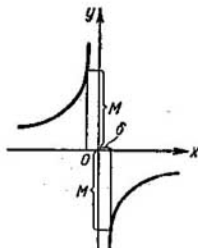


Fig. 35

Ejemplo 2. Demostremos que $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. En efecto, para cualquier $M > 0$ tenemos:

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M,$$

siempre que:

$$|x| = |x-0| < \frac{1}{M} = \delta.$$

Aquí $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$, para $x < 0$ y $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$, para $x > 0$ (fig. 35).

Si la función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \to \infty$, se escribe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

y, en particular, puede suceder:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty, \quad \text{etc.}$$

Observación 1. No es forzoso que la función $y = f(x)$ tienda a un límite finito o al infinito, cuando $x \to a$ o $x \to \infty$.

Ejemplo 3. La función $y = \operatorname{sen} x$, definida en el intervalo ilimitado $-\infty < x < +\infty$, cuando $x \to \infty$, no tiende a un límite finito, ni al infinito (fig. 36).

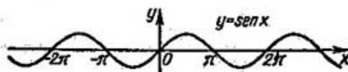


Fig. 36

Ejemplo 4. La función $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, definida para todos los valores de x, excepto $x = 0$, no tiende a un límite finito, ni tampoco al infinito, cuando $x \to 0$. La gráfica de esta función se expone en la fig. 37.

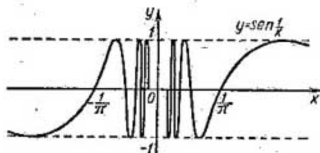


Fig. 37

Definición 2. La función $y = f(x)$ se denomina *acotada* en el dominio dado de variación del argumento x, si existe un número positivo M tal que para todos los valores de x pertenecientes al dominio considerado se cumpla la desigualdad $|f(x)| \leqslant M$. Si el número M no existe, se dice que la función $f(x)$ no está acotada en el dominio dado.

Ejemplo 5. La función $y = \operatorname{sen} x$, definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, es una función acotada, dado que para todos los valores de x se verifica:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 = M.$$

Definición 3. La función $f(x)$ se denomina *acotada, cuando* $x \to a$, si existe una vecindad con centro en el punto a en la cual dicha función está acotada.

Definición 4. La función $y = f(x)$ se denomina *acotada, cuando* $x \to \infty$, si existe un número $N > 0$ tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, la función $f(x)$ esté acotada.

El problema del acotamiento de la función que tiende a un límite se resuelve por medio del siguiente teorema.

Teorema 1. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *siendo* b *un número finito, la función* $f(x)$ *está acotada cuando* $x \to a$.

Demostración. De la igualdad $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un número δ tal que en la vecindad $a - \delta < x < a + \delta$ se cumpla la desigualdad

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

o sea,

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon.$$

Esto significa que la función $f(x)$ está acotada, cuando $x \to a$.

Observación 2. De la definición de función acotada $f(x)$ se deduce que si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ ó } \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

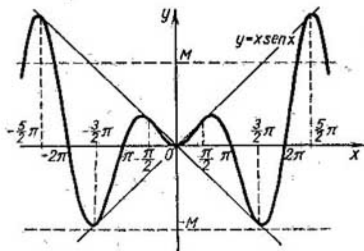


Fig. 38

es decir, si $f(x)$ es infinitamente grande, esta función no está acotada. La notación recíproca no es cierta; es decir, que una función no acotada puede no ser infinitamente grande.

Por ejemplo, la función $y = x$ sen x, cuando $x \to \infty$ no está acotada, ya que para cualquier $M > 0$ se pueden encontrar valores de x tales que $|x \text{ sen } x| > M$. Pero la función $y = x$ sen x no es infinitamente grande, pues se reduce a cero, cuando $x = 0, \pi, 2\pi$ .. La gráfica de la función $y = x$ sen x está expuesta en la fig. 38.

Teorema 2. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) - b \neq 0$, *la función* $y = \frac{1}{f(x)}$ *está acotada, cuando* $x \to a$.

Demostración. De la hipótesis del teorema se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario, en cierta vecindad del punto $x = a$ tendremos: $|f(x) - b| < \varepsilon$, ó $||f(x)| - |b|| < \varepsilon$, ó $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$ ó $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$. De las últimas desigualdades se deduce:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon}.$$

Al tomar, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$, tenemos

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|},$$

lo que significa que la función $\frac{1}{f(x)}$ está acotada.

§ 4. INFINITESIMALES Y SUS PRINCIPALES PROPIEDADES

Examinemos en este párrafo las funciones que tienden a cero, para cierto modo de variación del argumento.

Definición. La función $\alpha = \alpha(x)$ se denomina *infinitamente pequeña* (*infinitesimal*), cuando $x \to a$ o cuando $x \to \infty$, si $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ ó $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

De la definición de límite se deduce que si, por ejemplo, $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, esto significa que, para cualquier número positivo ε prefijado y arbitrariamente pequeño, se encontrará $\delta > 0$ tal que para todos los x que satisfacen la condición $|x - a| < \delta$, se verifique la condición $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Ejemplo 1. La función $\alpha = (x-1)^2$ es infinitamente pequeña, cuando $x \to 1$, dado que $\lim\limits_{x \to 1} \alpha = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$ (fig. 39).

Ejemplo 2. La función $\alpha=\frac{1}{x}$ es infinitamente pequeña, cuando $x\to\infty$ (fig. 40) (véase el ejemplo 3 en el § 2).

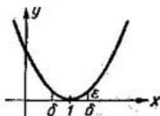


Fig. 39

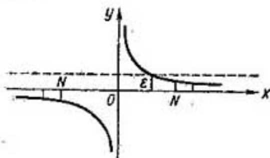


Fig. 40

Tendrá mucha importancia en adelante la correlación siguiente:

Teorema 1. *Si la función $y = f(x)$ puede ser representada como suma del número constante b y la magnitud infinitamente pequeña α:*

$$y = b + \alpha, \tag{1}$$

se tiene que

$$\lim y = b \text{ (cuando } x\to a \text{ ó } x\to\infty).$$

Recíprocamente, *si* $\lim y = b$, *se puede escribir* $y = b + \alpha$, *donde* α *es una magnitud infinitamente pequeña.*

Demostración. De la igualdad (1) se deduce que $|y - b| = |\alpha|$. Pero cuando ε es arbitrario todos los valores de α, a partir de uno de ellos, satisfacen la desigualdad $|\alpha| < \varepsilon$; entonces, para todos los valores de y, a partir de alguno de ellos, se cumplirá la desigualdad $|y - b| < \varepsilon$, lo que significa que $\lim y = b$.

Recíprocamente: si $\lim y = b$, entonces, para ε arbitrario para todos los valores de y, a partir de uno de ellos, se verificará la desigualdad $|y - b| < \varepsilon$. Pero, si designamos $y - b = \alpha$, entonces, para todos los valores de α, a partir de alguno de ellos, tendremos $|\alpha| < \varepsilon$, lo que significa que α es una magnitud infinitamente pequeña.

Ejemplo 3. Dada la función $y=1+\frac{1}{x}$ (fig. 41), es evidente que $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$.

Recíprocamente, si $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$, la variable y puede ser representada como suma del límite 1 y la infinitesimal $\alpha=\frac{1}{x}$, es decir, $y=1+\alpha$.

Teorema 2. *Si* $\alpha = \alpha(x)$ *tiende a cero, cuando* $x\to a$ *(o cuando* $x\to\infty$*), sin reducirse a cero, se tendrá que* $y = \frac{1}{\alpha}$ *tiende al infinito.*

Demostración. Por grande que sea $M > 0$, se cumplirá la desigualdad $\frac{1}{|\alpha|} > M$, siempre que se cumpla $|\alpha| < \frac{1}{M}$. La última desigualdad se cumplirá para todos los valores de α, a partir de alguno de ellos, puesto que $\alpha(x) \to 0$.

Teorema 3. *La suma algebraica de dos, tres o un número determinado de infinitesimales es una función infinitamente pequeña.*

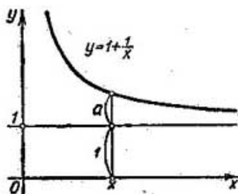


Fig. 41

Demostración. Nos limitaremos a dos sumandos, ya que la demostración es análoga para cualquier número de ellos.

Supongamos que $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, donde $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Demostremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, se encontrará $\delta > 0$ tal que, al satisfacer la desigualdad $|x - a| < \delta$, se verifique $|u| < \varepsilon$. Puesto que $\alpha(x)$ es una magnitud infitamente pequeña se encontrará δ tal que en la vecindad de radio δ_1 y centro ubicado en el punto a, se verificará, también, $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Puesto que $\beta(x)$ es una magnitud infinitamente pequeña, en la vecindad del punto a de radio δ_2 tendremos $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos δ igual a la menor de las magnitudes δ_1 y δ_2. Entonces, en la vecindad del punto a de radio δ se cumplirán las desigualdades $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, en esta vecindad tendremos:

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $|u| < \varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

De un modo análogo se demuestra el caso:

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \beta(x) = 0.$$

Observación. En lo sucesivo tendremos que examinar las sumas de magnitudes infinitamente pequeñas en las que, al ir disminuyendo cada sumando, vaya creciendo el número de éstos. En este caso el teorema puede no ser válido.

Examinemos, por ejemplo, $u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}}_{x \text{ sumandos}}$, donde x toma sólo valores enteros positivos ($x = 1, 2, 3, \ldots, n \ldots$). Es evidente que cada sumando, cuando $x \to \infty$, es una magnitud infinitamente pequeña, sin que lo sea la suma $u = 1$.

Teorema 4. *El producto de una función infinitamente pequeña $\alpha = \alpha(x)$ por una función acotada $z = z(\alpha)$, cuando $x \to a$ (ó $x \to \infty$), es una magnitud (función) infinitamente pequeña.*

Demostración. Demostremos el teorema para el caso en que $x \to a$. Dado un número $M > 0$, se encontrará tal vecindad del punto $x = a$ en la que se verificará la desigualdad $|z| < M$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará una vecindad en la que se cumplirá la desigualdad $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$. En la menor de estas dos vecindades se cumplirá la desigualdad

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Esto quiere decir que αz es una magnitud infinitamente pequeña. Para el caso de $x \to \infty$, la demostración se efectúa de modo análogo. Del teorema demostrado se deducen dos corolarios.

Corolario 1. Si $\lim \alpha = 0$ y $\lim \beta = 0$, entonces $\lim \alpha\beta = 0$, puesto que $\beta(x)$ es una magnitud acotada. Esto se cumple para cualquier número finito de factores.

Corolario 2. Si $\lim \alpha = 0$ y $c = \text{const}$, entonces $\lim c\alpha = 0$.

Teorema 5. *El cociente $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ de la división de una magnitud infinitamente pequeña $\alpha(x)$ por una función, cuyo límite es diferente de cero, es una magnitud infinitamente pequeña.*

Demostración. Supongamos que $\lim \alpha(x) = 0$ y $\lim z(x) = b \neq 0$. Basándose en el teorema 2, § 3 se deduce que $\frac{1}{z(\alpha)}$ es una

magnitud acotada. Por consiguiente, la fracción $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\frac{1}{z(x)}$ es el producto de una magnitud infinitamente pequeña por otra acotada, es decir, una infinitesimal.

§ 5. TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LIMITES

En este apartado, como en el anterior, vamos a examinar conjuntos de funciones que dependen de un mismo argumento x, cuando $x \to a$ o cuando $x \to \infty$.

Por ser análogas las demostraciones para ambos casos nos limitaremos a uno sólo, omitiendo, incluso, las notaciones $x \to a$ o $x \to \infty$, que consideraremos sobreentendidas.

Teorema 1. *El límite de la suma algebraica de dos, tres y, en general, de un número finito de variables es igual a la suma algebraica de los límites de estas variables:*

$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k.$

Demostración. Puesto que la demostración es análoga para cualquier número de sumandos, tomemos sólo dos.

Supongamos que $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Basándonos en el teorema 1 § 4, podemos escribir:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1,\ u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

donde α_1 y α_2 son magnitudes infinitesimales. Por tanto,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Puesto que $(a_1 + a_2)$ es una magnitud constante y $(\alpha_1 + \alpha_2)$ es una infinitesimal, entonces, de acuerdo con el teorema 1 § 4, resultará que

$$\lim (u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2 .$$

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1+0 = 1.$$

Teorema 2. *El límite del producto de dos, tres y, en general, de un número finito de variables es igual al producto de los límites de estas variables:*

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k.$$

Demostración. Con el fin de abreviar, realicemos la demostración para dos factores. Supongamos que $\lim u_1 = a_1$ y $\lim u_2 = a_2$. Por tanto,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1,\ u_2 = a_2 + \alpha_2.$$

$$u_1u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1a_2 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2.$$

El producto a_1a_2 es una constante. Según los teoremas del § 4, la magnitud $a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ es infinitamente pequeña. Por consiguiente, $\lim u_1u_2 = a_1a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Corolario. Un factor constante se puede sacar fuera del signo de límite. En efecto, si $\lim u_1 = a_1$, $c = \text{const}$ y, por tanto, $\lim c = c$, se tiene:

$\lim (cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \lim u_1$, que es lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 2} 5x^3 = 5 \lim_{x\to 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

Teorema 3. *El límite del cociente de dos variables es igual al cociente de los límites de estas variables, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero:*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \text{ siempre que } \lim v \neq 0.$$

Demostración. Supongamos que $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Entonces $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, donde α y β son magnitudes infinitamente pequeñas. Escribamos las identidades

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)},$$

o sea,

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

La fracción $\frac{a}{b}$ es un número constante y $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$ (según los teoremas 4 y 5, § 4) es una variable infinitamente pequeña, puesto que $\alpha b - \beta a$ es también una infinitesimal y el denominador $b(b+\beta)$ tiene por límite $b^2 \neq 0$. Por consiguiente, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} (3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1} (4x-2)} = \frac{3 \lim\limits_{x\to 1} x + 5}{4 \lim\limits_{x\to 1} x - 2} = \frac{3\cdot 1+5}{4\cdot 1-2} = \frac{8}{2} = 4.$$

En este ejemplo hemos aprovechado el teorema, ya demostrado, acerca del límite de una fracción, puesto que el límite del denominador, cuando $x \to 1$, es distinto de cero. Pero, si el límite del denominador es cero, no se puede aplicar el teorema citado. En este último caso hacen falta consideraciones especiales.

Ejemplo 4. Hallar $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

Aquí el denominador y el numerador tienden a cero, cuando $x \to 2$, y, por tanto, el teorema 3 no es válido para el caso. Realicemos la siguiente transformación idéntica:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

La transformación es válida para todos los valores de x diferentes de 2. Por tanto, teniendo en cuenta la definición de límite, podemos escribir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Ejemplo 5. Hallar $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$. Cuando $x \to 1$, el denominador tiende a cero, mientras que el numerador tiende a la unidad. Por consiguiente, el límite de la magnitud inversa es cero, es decir,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0.$$

De aquí se deduce, según el teorema 2 del párrafo precedente, que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty.$$

Teorema 4. *Si entre los valores correspondientes de las tres funciones $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$, se cumplen las desigualdades $u \leqslant z \leqslant v$, y, además, $u(x)$ y $v(x)$ tienden a un mismo límite b, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$), entonces podemos afirmar que la función $z = z(x)$ también tiende a este mismo límite, cuando $x \to a$ (o cuando $x \to \infty$).*

Demostración. Para precisar las ideas, examinemos la variación de las funciones, cuando $x \to a$. De las desigualdades $u \leqslant z \leqslant v$ se infiere que:

$$u-b \leqslant z-b \leqslant v-b;$$

según las condiciones del teorema, tenemos:

$$\lim_{x\to a} u = b,\ \lim_{x\to a} v = b.$$

Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, se encontrará alguna vecindad con centro en el punto a, en la que se verificará la desigualdad $|u-b| < \varepsilon$; del mismo modo se encontrará también alguna vecindad con centro en el punto a, en la que se verificará la desigualdad $|v-b| < \varepsilon$. En la vecindad menor de las mencionadas se cumplirán las desigualdades:

$$-\varepsilon < u-b < \varepsilon \text{ y } -\varepsilon < v-b < \varepsilon$$

y, por tanto, también, se cumplirán las desigualdades

$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{x \to a} z = b.$$

Teorema 5. *Si, cuando* $x \to a$ *(o cuando* $x \to \infty$*), la función* y*, tomando valores no negativos* $(y \geqslant 0)$*, tiende al límite* b*, éste último será un número no negativo, o sea* $b \geqslant 0$.

Demostración. Supongamos que $b < 0$, entonces $|y - b| \geqslant |b|$, es decir, el módulo de la diferencia $|y - b|$ es mayor que el número positivo $|b|$ y, por tanto, no tiende a cero, cuando $x \to a$. Pero, en este caso y no tiende a b, cuando $x \to a$, lo que contradice a la condición del teorema. Esto quiere decir que la hipótesis de que $b < 0$ no es cierta y, por tanto, $b \geqslant 0$.

De la misma manera se demuestra que $\lim y \leqslant 0$, si $y \leqslant 0$.

Teorema 6. *Si entre los valores correspondientes de dos funciones,* $u = u(x)$ y $v = v(x)$*, que tienden a sus límites respectivos, cuando* $x \to a$ *(o cuando* $x \to \infty$*), se cumple la desigualdad* $v \geqslant u$*, también se verificará que* $\lim v \geqslant \lim u$.

Demostración. Dada la condición $v - u \geqslant 0$, y, de acuerdo con el teorema 5, $\lim (v - u) \geqslant 0$ o $\lim v - \lim u \geqslant 0$, es decir, $\lim v \geqslant \lim u$.

Ejemplo 6. Demostremos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$. Según la fig. 42, si $OA = 1$ y $x > 0$, tendremos $AC = \operatorname{sen} x$, $\smile AB = x$, $\operatorname{sen} x < x$. Es evidente que, siendo

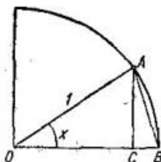


Fig. 42

$x < 0$, tenemos $|\operatorname{sen} x| < |x|$. Según los teoremas 5 y 6, podemos deducir de estas dos desigualdades que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Ejemplo 7. Demostremos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$.

En efecto, $\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| < |\operatorname{sen} x|$. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$.

Ejemplo 8. Demostremos que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Siendo $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}$, tenemos, $\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}\right) =$ $= 1 - 2 \lim_{x\to 0} \text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1$.

En algunas investigaciones respecto al límite de las variables es necesario resolver dos problemas independientes:

1) demostrar que una variable tiene su límite y determinar los cónfines dentro de los cuales se encuentra este límite.

2) calcular el límite dado con el grado de precisión necesaria.

A veces el primer problema se resuelve mediante el siguiente importante teorema.

Teorema 7. *Si la magnitud variable v es creciente, es decir, cada valor posterior de la misma es mayor que el anterior, y si ésta es acotada, o sea $v < M$, entonces dicha variable tiene como límite $\lim v = a$, donde $a \leqslant M$.*

En el caso de que la magnitud variable sea decreciente y acotada, el teorema correspondiente se enuncia de un modo semejante. No damos aquí la demostración del teorema porque se basa en la teoría de los números reales, que no se considera en el presente curso.

En los dos párrafos siguientes vamos a calcular los límites de dos funciones que tienen gran aplicación en las matemáticas.

§ 6. LIMITE DE LA FUNCION $\frac{\text{sen}\, x}{x}$, CUANDO $x \to 0$

La función $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ no está definida para $x = 0$, puesto que tanto el numerador, como el denominador de la fracción se reducen a cero.

Veamos el límite de esta función, cuando $x \to 0$.

Fig. 43

Consideremos una circunferencia de radio 1 (fig. 43); designemos por x, el ángulo central MOB, siendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En la fig. 43 se

puede observar que: área $\triangle\ MOA <$ área del sector $MOA <$ área $\triangle\ COA$. (1)

$$\text{Area } \triangle\ MOA = \frac{1}{2}\ OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x.$$

$$\text{Area del sector } MOA = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{AM} = \frac{1}{2} 1 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{Area } \triangle\ COA = \frac{1}{2}\ OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Suprimiendo el factor 1/2, la desigualdad (1) se escribirá así:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dividamos por sen x todos los miembros y tendremos:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

o sea,

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Hemos obtenido esta desigualdad, suponiendo que $x > 0$. Teniendo en cuenta que $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\cos(-x) = \cos x$,

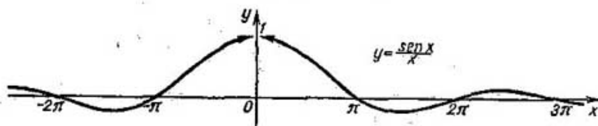


Fig. 44

concluimos que la desigualdad también es válida para $x < 0$. Pero, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \to 0} 1 = 1$. Por tanto, la variable $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se halla comprendida entre dos magnitudes que tienen 1 por límite. De este modo, de acuerdo con el teorema 4 del párrafo precedente tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

La gráfica de la función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se expone en la fig. 44.

Ejemplos:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} kx}{x}=\lim_{x\to 0}k\frac{\operatorname{sen} kx}{kx}=k\lim_{\substack{x\to 0\\(kx\to 0)}}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{(kx)}=k\cdot 1=k \qquad (k=\text{const}).$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\operatorname{sen}\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

($\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$).

§ 7. NUMERO e

Examinemos la magnitud variable

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es una variable creciente que va tomando los valores: 1, 2, 3, . . .

Teorema 1. *La variable* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *tiene su límite comprendido entre los números 2 y 3, cuando* $n\to\infty$.

Demostración. Según el binomio de Newton, podemos escribir:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Después de transformaciones algebraicas evidentes (1), obtenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (2)$$

De la última igualdad se deduce que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente, cuando crece n.

En efecto, cada uno de los sumandos crece al pasar del valor n al $n+1$, es decir:

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \text{ etc, y se agrega}$$

un término más. Todos los términos del desarrollo son positivos.

Demostremos que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ está acotada. Teniendo en cuenta que $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$, etc., de la expresión (2) obtenemos la desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n}.$$

Considerando que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3};\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

podemos escribir

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Los términos subrayados en el segundo miembro de esta desigualdad forman una progresión geométrica que tiene por razón $q =$

$=\frac{1}{2}$ y por primer término, $a = 1$; por esto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=$$

$$=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Por tanto, para todos n tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

De la igualdad (2) se deduce que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

y por tanto obtenemos las desigualdades

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3. \qquad (3)$$

Así pues, queda establecido que la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ está acotada.

Como la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada, tiene (según el teorema 7, § 5) pues, su límite. Este límite se designa con la letra e.

Definición. Se denomina número e al límite*) de la variable $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \to \infty$:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Conforme al teorema 6, § 5, de la desigualdad (3) podemos deducir que el número e satisface la desigualdad $2 \leqslant e \leqslant 3$.

El teorema queda, pues, demostrado.

El número e es irracional. Más adelante exponemos el método para su cálculo con cualquier grado de precisión. Su valor, con diez cifras decimales es:

$$e = 2,\ 7182818284\ldots\ .$$

---

*) Se puede demostrar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, cuando $n \to +\infty$, si n no es una variable creciente.

Teorema 2. *La función* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *tiende al límite e cuando x tiende al infinito:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Demostración. Hemos establecido que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, cuando $n\to\infty$, si n toma valores enteros y positivos. Supongamos ahora que x tiende al infinito, tomando valores tanto fraccionarios como negativos.

1) Supongamos que $x\to+\infty$. Cada valor de x se halla comprendido entre dos números enteros positivos

$$n\leqslant x<n+1.$$

En este caso se cumplen las desigualdades:

$$\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n}\geqslant 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Si $x\to\infty$, es evidente que también $n\to\infty$. Hallemos los límites de las variables entre los cuales se encuentra la variable $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

Por tanto, según el teorema 4, § 5, se tiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4}$$

2) Supongamos que $x \to -\infty$. Introduzcamos una nueva variable $t = -(x+1)$ o sea $x = -(t+1)$. Cuando $t \to +\infty$, tendremos que $x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e.$$

El teorema queda demostrado. La gráfica de la función $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ se expone en la fig. 45.

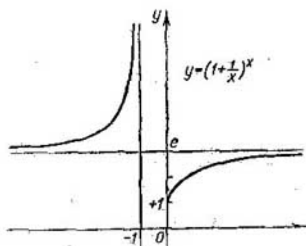


Fig. 45

Si en la igualdad (4) introducimos $\frac{1}{x} = \alpha$, entonces tenemos $\alpha \to 0$ (pero, $\alpha \neq 0$), cuando $x \to \infty$, y obtenemos:

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Ejemplos:

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times$$
$$\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=e\cdot 1=e.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\cdot e\cdot e=e^3.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=e^2.$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4}=$$
$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=e^4\cdot 1=e^4.$$

§ 8. LOGARITMOS NATURALES

En el párrafo 8 del capítulo primero se ha definido la función logarítmica $y=\log_a x$. Como se sabe, el número a es la base de logaritmos. Si $a=10$, entonces y se denomina logaritmo decimal del número x e y se escribe $y=\log x$. En la escuela secundaria se estudian las tablas de logaritmos decimales, llamados también de *Briggs*, nombre del sabio inglés que los inventó (1556-1630).

Los logaritmos que tienen por base el número $e=2{,}71828\ldots$, se llaman *naturales o neperianos*, en honor del matemático Neper (1550-1617), uno de los primeros inventores de las tablas de logaritmos. Por consiguiente, si $e^y=x$, entonces y se denomina logaritmo natural del número x, y se escribe así: $y=\ln x$, en lugar de $y=$ $=\log_e x$. (Véase las gráficas de las funciones $y=\ln x$ e $y=\lg x$ en la fig. 46). Determinemos ahora la correlacion que existe entre logaritmos decimales y los naturales de un mismo número x. Supongamos que $y=\log x$, o sea $x=10^y$.

Tomemos los logaritmos naturales de los dos miembros de la última ecuación, escogiendo e como base, y tendremos: $\ln x=$ $=y\ln 10$, de donde $y=\dfrac{1}{\ln 10}\ln x$. Sustituyendo el valor de y ten-

dremos:

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \ln x.$$

Lo que quiere decir que, cuando se conoce el logaritmo natural de un número x, se puede hallar su logaritmo decimal, multiplicándolo por el factor $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}434294$, valor que no depende

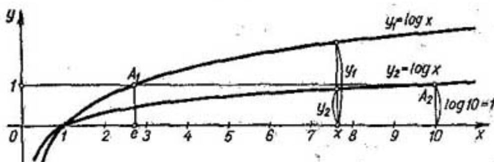


Fig. 46

de x. A este factor M se le denomina módulo o factor de transición de los logaritmos naturales a los decimales:

$$\log x = M \ln x.$$

Al introducir en esta identitud $x = e$, hallaremos la expresión del número M por medio de logaritmos decimales:

$$\log e = M \ (\ln e = 1).$$

Los logaritmos naturales se expresan en logaritmos decimales de la manera siguiente:

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

donde $\frac{1}{M} = 2{,}302585$.

Observación. Existen tablas especiales para el cálculo de logaritmos naturales.

§ 9. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida para cierto valor x_0 y en cierta vecindad de centro en el mismo punto. Sea: $y_0 = f(x_0)$.

Si x recibe cierto incremento Δx (positivo o negativo), y toma el valor $x = x_0 + \Delta x$, la funcion y también resultará incrementada

en Δy. El nuevo valor incrementado de la función será $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (fig. 47). El incremento de la función Δy se expresa mediante la fórmula

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

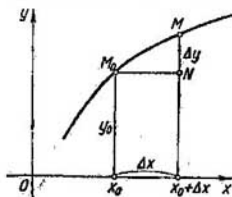


Fig. 47

Definición 1. *La función* $y = f(x)$ se considera *continua, para el valor de* $x = x_0$ (o en el *punto* x_0), si está definida en cierta vecindad del punto x_0, (incluido el punto x_0) y si:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

La condición (2) se puede escribir así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ó

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)... \tag{2}$$

En lenguaje geométrico la continuidad de la función en el punto dado significa que la diferencia de las ordenadas de la gráfica $y = f(x)$ en los puntos $x_0 + \Delta x$ y x_0 será, en valor absoluto, arbitrariamente pequeña a condición de que $|\Delta x|$ sea lo suficientemente pequeño.

Ejemplo 1. Demostremos que la función $y = x^2$ es continua en el punto x_0, arbitrariamente elegido. En efecto,

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2, \quad \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

independiente del modo en que Δx tiende a cero (fig. 48*a* y *b*).

Ejemplo 2. Comprobemos que la función $y = \text{sen}\ x$ es continua en cualquier punto arbitrario x_0. En efecto,

$$y_0 = \text{sen}\ x_0,\quad y_0 + \Delta y = \text{sen}\ (x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \text{sen}\ (x_0 + \Delta x) - \text{sen}\ x_0 = 2\ \text{sen}\ \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

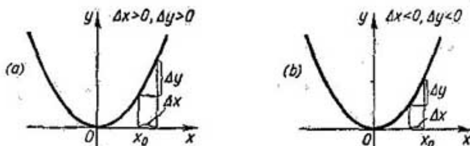


Fig. 48

Ya hemos visto que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \text{sen}\ \frac{\Delta x}{2} = 0$ (ejemplo 7, § 5). La función $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ está acotada. Por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Del mismo modo se puede demostrar que cualquier función elemental fundamental es continua en cada punto en el que la función esté definida.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1. *Siendo las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ continuas en el punto x_0, su suma $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$, también será función continua en el mismo punto x_0.*

Demostración. Siendo continuas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, de acuerdo con la igualdad (2'), podemos escribir:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

Según el teorema 1 sobre límites, tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) =$$

$$= f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0),$$ es decir,

la suma $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ es una función continua, como se trataba de demostrar.

Como corolario, observemos que el teorema citado es válido para cualquier número de sumandos.

Basándose en las propiedades de los límites, se puede demostrar también los teoremas siguientes:

a) El producto de dos funciones continuas es una función continua.

b) El cociente de dos funciones continuas es una función continua, si el denominador no se reduce a cero en el punto considerado.

c) Si $u = \varphi(x)$ es una función continua para $x = x_0$ y si $f(u)$ también es continua en el punto $u_0 = \varphi(x_0)$, la función compuesta $f[\varphi(x)]$ será continua en el punto x_0.

Basándose en estos teoremas se puede formular el siguiente teorema.

Teorema 2. *Cualquier función elemental es continua en cada punto en el cual la función está definida.*

Observación. Dado que en la igualdad (2')

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$x_0 = \lim_{x \to x_0} x,$$

podemos escribirla así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x), \tag{3}$$

es decir, que para hallar el límite de la función continua cuando $x \to x_0$, basta sustituir el argumento x por su valor x_0 en la expresión de la función.

Ejemplo 3. La función $y = x^2$ es continua en cualquier punto x_0, y por tanto:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2,$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

Ejemplo 4. La función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto, de donde

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ejemplo 5. La función $y = e^x$ es continua en cualquier punto y por tanto: $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$.

Ejemplo 6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right].$$

Ya que $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ y la función $\ln z$ es continua para $z > 0$ y, por lo tanto,

para $z = e$, se tiene

$$\lim_{x \to 0} \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln[\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

Definición 2. Se dice que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo dado (a, b), donde $a < b$, siempre que ésta sea *continua en cada uno de sus puntos.*

Si la función está definida también en el punto $x = a$ siendo $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, se dice que en el punto $x = a$ la función $f(x)$ es *continua por la derecha.* Siendo $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$, se dice que en el punto $x = b$ la función $f(x)$ es *continua por la izquierda.*

Si la función $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo (a, b), y lo es al mismo tiempo en los extremos de éste (por la derecha y por la izquierda, respectivamente) se dice que la función $f(x)$ es *continua en el intervalo o segmento cerrado* $[a, b]$.

Ejemplo 7. La función $y = x^2$ es continua en cualquier segmento $[a, b]$, como se deduce del ejemplo 1.

Si en algún punto $x = x_0$ para la función $y = f(x)$ no se cumple por lo menos una de las condiciones de continuidad, es decir, si para $x = x_0$ la función no está definida o no existe el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ o bien $\lim_{x \to x_0} f(x_0) \neq f(x_0)$ cuando $x \to x_0$ de una manera arbitraria, a pesar de que existen las expresiones a la derecha y a la izquierda, entonces la función $y = f(x)$ es *discontinua*, cuando $x = x_0$. El punto $x = x_0$ se denomina, en este caso, *punto de discontinuidad* de la función.

Ejemplo 8. La función $y = \frac{1}{x}$ es discontinua cuando $x = 0$. En efecto, cuando $x = 0$, la función no está definida:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Es fácil demostrar que esta función es continua para cualquier valor de $x \neq 0$.

Ejemplo 9. La función $y = 2^{\frac{1}{x}}$ es discontinua en $x = 0$. En efecto, $\lim_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. La función no está definida en $x = 0$ (fig. 49).

Ejemplo 10. Examinemos la función $f(x)=\frac{x}{|x|}$. Si $x<0$, $\frac{x}{|x|}=-1$, para $x>0$, $\frac{x}{|x|}=1$. Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x}{|x|}=-1;\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{|x|}=1;$$

cuando $x=0$, la función no está definida. De esta manera hemos establecido que la función $f(x)=\frac{x}{|x|}$ es discontinua en $x=0$ (fig. 50).

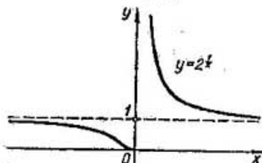


Fig. 49

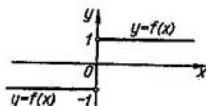


Fig. 50

Ejemplo 11. La función $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ examinada en el ejemplo 4, § 3, es discontinua en $x=0$.

Definición 3. Supongamos que la función $f(x)$ tiene los límites finitos: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ y $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, que son desiguales, es decir: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, o el valor de la función $f(x)$ no está definido, cuando $x=x_0$. En este caso, el punto $x=x_0$ se denomina *punto de discontinuidad de primer género*. (Para la función examinada en el ejemplo 10, el punto $x=0$, es un punto de discontinuidad de primer género).

§ 10. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

En este párrafo examinaremos algunas propiedades de las funciones continuas sobre un segmento. Estas propiedades las presentaremos como teoremas cuya demostración no se da en este libro.

Teorema 1. *Si la función $y=f(x)$ es continua sobre cierto segmento $[a, b]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, siempre se encontrará en este segmento por lo menos un punto $x=x_1$ tal que el valor de la función en dicho punto satisfaga la correlación*

$$f(x_1)\geqslant f(x),$$

en la que x es cualquier otro punto del segmento, y se encontrará también por lo menos un punto x_2 tal que el valor de la función en el mismo satisfaga la relación

$$f(x_2) \leqslant f(x).$$

El valor de la función $f(x_1)$ se llama *valor máximo* de la función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y el de la función $f(x_2)$ se denomina *valor mínimo* de la función en el mismo segmento $[a, b]$.

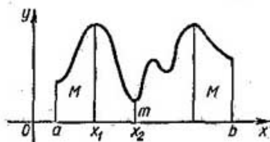


Fig. 51

Este teorema se enuncia brevemente así: *la función continua sobre el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ alcanza, una vez por lo menos, su valor máximo M y su valor mínimo m.*

La interpretación geométrica de este teorema se representa en la fig. 51.

Observación. El teorema enunciado puede no ser cierto, debido a que entre los valores de la función mencionada pueden no existir los valores máximo y mínimo en el intervalo $a < x < b$. Si, por ejemplo, examinamos la función $y = x$ en el intervalo $0 < x < 1$ no hallamos entre sus valores el máximo, ni el mímimo. En realidad esto debe ser así, pues no existe el punto extremo izquierdo, ya que si tomamos cualquier punto x^* habrá siempre otro punto, por ejemplo $\frac{x^*}{2}$, más a la izquierda que x^*. Por la misma razón no existe el punto extremo derecho y, por tanto, no puede haber valor máximo ni mínimo de la función $y = x$.

Teorema 2. *Si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, tomando en los extremos de éste valores de signos contrarios, entre los puntos a y b se hallará por lo menos un punto $x = c$, en el que la función se reduce a cero:*

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Este teorema tiene una sencilla interpretación geométrica. La gráfica de la función continua $y = f(x)$, que une los puntos $M_1[a, f(a)]$ y $M_2[b, f(b)]$, donde $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), corta el eje Ox por lo menos en un punto (fig. 52).

Ejemplo. Sea la función $y = x^3 - 2$. Se tiene: $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. Esta función es continua en el segmento [1, 2]. Por tanto, en éste existe un punto donde $y = x^3 - 2$ se reduce a cero. En efecto, $y = 0$ cuando $x = \sqrt[3]{2}$ (fig. 53).

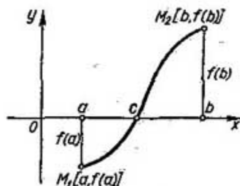


Fig. 52

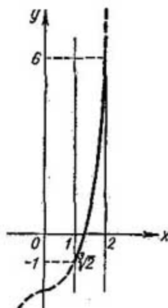


Fig. 53

Teorema 3. *Sea $y = f(x)$ una función definida y continua sobre el segmento $[a, b]$. Si en los extremos del segmento dado la función toma valores diferentes $f(a) = A$, $f(b) = B$, siempre se encontrará*

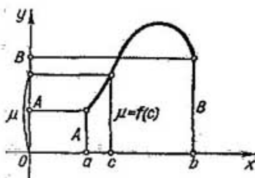


Fig. 54

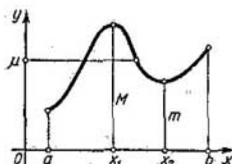


Fig. 55

un punto $x = c$, comprendido entre a y b, tal que $f(c) = \mu$, cualquiera que sea el número μ comprendido entre los valores A y B.

Este teorema se interpreta claramente en la fig. 54. En el caso dado, cualquier recta $y = \mu$ cortará la gráfica de la función $y = f(x)$.

Observación. El teorema 2 es un caso particular del teorema 3, ya que, teniendo A y B signos contrarios, podemos tomar el número 0

como valor de μ, y entonces $\mu = 0$ resultará comprendido entre los números A y B.

Corolario del teorema 3. *Si la función $y = f(x)$ es continua sobre cierto intervalo, tomando los valores máximo y mínimo, se puede deducir que en el intervalo enunciado la función toma, por lo menos una vez, cualquier valor comprendido entre sus valores extremos.*

En efecto, supongamos que $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Según el teorema 3, en el segmento $[x_1, x_2]$ la función $y = f(x)$ toma cualquier valor μ, comprendido entre M y m. Pero el segmento $[x_1, x_2]$ se encuentra dentro del intervalo considerado, en el cual está definida la función $f(x)$ (fig. 55).

§ 11. COMPARACION DE LAS MAGNITUDES INFINITESIMALES

Supongamos que unas cuantas magnitudes infinitamente pequeñas (infinitesimales) α, β, γ, . . . son funciones de un mismo argumento x, y tienden a cero cuando x tiende al límite a o al infinito. Analicemos la tendencia de estas variables a cero, considerando la razón de las mismas.*

En adelante usaremos las siguientes definiciones.

Definición 1. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ tiene un límite finito y distinto de cero, es decir, que $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ y, por tanto, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$, se dice que las infinitesimales α y β son del mismo orden.

Ejemplo 1. Supóngase que $\alpha = x$, $\beta = \operatorname{sen} 2x$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β son del mismo orden, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2.$$

Ejemplo 2. Cuando $x \to 0$, las infinitesimales x, $\operatorname{sen} 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $7 \ln(1 + x)$ son todas del mismo orden. La demostración es análoga a la del ejemplo 1.

Definición 2. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitesimales tiende a cero, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ (y $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$), entonces la infinitesimal β *se denomina infinitesimal del orden superior que* α; *recíprocamente, α será una infinitesimal de orden inferior que* β.

---

*) Partimos de que la infinitesimal que sirve de denominador no se reduce a cero en alguna vecindad del punto a.

Ejemplo 3. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \to 0$. La infinitesimal β es de orden superior que la α, puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0.$$

Recíprocamente la infinitesimal α es de orden inferior que la β.

Definición 3. Se dice que β es *magnitud infinitamente pequeña de orden k respecto a* α, si β y α^k son infinitesimales del mismo orden, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$.

Ejemplo 4. Si $\alpha = x$, $\beta = x^3$, cuando $x \to 0$, la infinitesimal β es una infinitesimal de tercer orden respecto a la infinitesimal α, puesto que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1.$$

Definición 4. Si la razón de dos infinitesimales $\frac{\beta}{\alpha}$ tiende a la unidad, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, estas infinitesimales se denominan equivalentes: y se escriben así: $\alpha \sim \beta$.

Ejemplo 5. Supongamos que $\alpha = x$ y $\beta = \operatorname{sen} x$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo 6. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = \ln(1 + x)$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(véase ejemplo 6, § 9).

Teorema 1. *Si α y β son infinitesimales equivalentes, su diferencia $\alpha - \beta$ es una infinitesimal de orden superior que las α y β.*

Demostración. En efecto,

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Teorema 2. (Recíproco del anterior). *Si la diferencia de dos infinitesimales $\alpha - \beta$ es una infinitesimal de orden superior que las α y β, éstas son infinitesimales equivalentes.*

Demostración. Supongamos que $\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$, entonces: $\lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, o sea, $1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, o bien, $1 = \lim \frac{\beta}{\alpha}$, es decir, $\alpha \approx \beta$.
Si $\lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$, se tiene $\lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0$, o bien $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, es decir, $\alpha \approx \beta$.

Ejemplo 7. Supongamos que $\alpha = x$ y $\beta = x + x^3$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, ya que su diferencia $\beta - \alpha = x^3$ es una infinitesimal de orden superior que α y β. En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

Ejemplo 8. Cuando $x \to \infty$, las infinitesimales $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ y $\beta = \frac{1}{x}$ son equivalentes, puesto que su diferencia $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ es una infinitesimal de orden superior que α y β. El límite de la razón α respecto a β es 1:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Observación. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitesimales no tiene límite y no tiende al infinito, entonces β y α no son comparables en el sentido mencionado anteriormente.

Ejemplo 9. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, donde $x \to 0$. Las infinitesimales α y β no son comparables, dado que su razón $\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no tiende a ningún límite finito, ni infinito, cuando $x \to 0$, (véase ejemplo 4 § 3).

Ejercicios para el capítulo II

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. *Respuesta*: 4. 2. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} [2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{cotg} x]$. *Respuesta*: 2. 3. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. *Respuesta*: 0. 4. $\lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$. *Respuesta*: 2.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. *Respuesta:* $\dfrac{4}{3}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$. *Respuesta:* 1.
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$. 8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{3}$.

Indicaciones. Expresemos la fórmula $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ para $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

$$1^3=1;$$
$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$
$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

de donde

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. *Respuesta:* ∞. 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. *Respuesta:* 0.
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$. 12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. *Respuesta:* 4.
13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. *Respuesta:* 3. 14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{8}$.
15. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. *Respuesta:* 1. 16. $\lim\limits_{y\to-2}\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. *Respuesta:* $-\dfrac{2}{5}$.
17. $\lim\limits_{u\to-2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. *Respuesta:* 0. 18. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. *Respuesta:* $3x^2$.
19. $\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x}\right]$. *Respuesta:* -1. 20. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$. *Respuesta:* n (n es un número entero positivo). 21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$.
22. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. *Respuesta:* $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. *Respuesta:* $\dfrac{q}{p}$. 24. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Respuesta:* $\dfrac{2}{3}$. 25. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. *Respuesta:* $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$. 26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. *Respuesta:* $\dfrac{1}{2}$. 27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. *Respuesta:* 1. 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. *Respuesta:* 1 cuando $x\to+\infty$, -1 cuando $x\to-\infty$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. *Respuesta*: 0. 30. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$ cuando $x\to+\infty$, $-\infty$ cuando $x\to-\infty$. 31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$. *Respuesta*: 1. 32. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$. *Respuesta*: 4. 33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}}{x^2}$. *Respuesta*: $\frac{1}{9}$.

34. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. *Respuesta*: $\frac{2}{\sqrt{2}}$. 35. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$. *Respuesta*: 1.

36. $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos v}{\operatorname{sen}\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. *Respuesta*: $\sqrt{3}$. 37. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}$. *Respuesta*: $\frac{2}{\pi}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$. *Respuesta*: $\frac{2}{3}$. 39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{x}$. *Respuesta*: $2\cos\alpha$. 40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$. 41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$. *Respuesta*: e^2. 42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. *Respuesta*: $\frac{1}{e}$. 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. *Respuesta*: $\frac{1}{e}$. 44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$. *Respuesta*: e. 45. $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$. *Respuesta*: 1. 46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$. *Respuesta*: e^3. 47. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$.
Respuesta: α. 48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. *Respuesta*: e. 49. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$.
Respuesta: e^3. 50. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$. *Respuesta*: 1. 51. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(1+e^{\alpha})}{\alpha}$.
Respuesta: 1 cuando $\alpha\to+\infty$, 0 cuando $\alpha\to-\infty$. 52. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}$.
Respuesta: $\frac{\alpha}{\beta}$. 53. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>1)$. *Respuesta*: $+\infty$ cuando $x\to+\infty$, 0 cuando $x\to-\infty$. 54. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[a^{\frac{1}{n}}-1\right]$. *Respuesta*: $\ln a$. 55. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.
Respuesta: $\alpha-\beta$. 56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\operatorname{sen}\alpha x-\operatorname{sen}\beta x}$. *Respuesta*: 1.

Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones:

57. $y=\frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. *Respuesta*: Discontinuidad para $x=-2$; -1; 0; 2. 58. $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. *Respuesta*: Discontinuidad para $x=0$ y $x=\pm\frac{2}{\pi}$; $\pm\frac{2}{3\pi}$; ... ...; $\frac{2}{(2n+1)\pi}$; ...

59. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y=1+2^{\frac{1}{x}}$ y construir la gráfica de esta función. *Respuesta*: Discontinuidad para $x=0$ ($y\to+\infty$ cuando $x\to 0+0$, $y\to 1$ cuando $x\to 0-0$).

60. Entre las infinitesimales (cuando $x\to 0$) siguientes: x^2, $\sqrt{x(1-x)}$, $\operatorname{sen} 3x$, $2x\cos x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, xe^{2x}, elíjanse las infinitesimales del mismo orden que la infinitesimal x, así como las de orden superior e inferior a x. *Respuesta*: Las infinitesimales del mismo orden son: $\operatorname{sen} 3x$ y xe^{2x}, las de orden superior x^2 y $2x\cos\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$ y la infinitesimal de orden inferior es $\sqrt{x(1-x)}$.

61. Entre las infinitesimales indicadas (cuando $x\to 0$) hallar las infinitesimales que son equivalentes a la infinitesimal x: $2\operatorname{sen} x$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\ln(1+x)$, x^3+3x^4. *Respuesta*: $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$, $x-3x^2$, $\ln(1+x)$.

62. Demostrar que, cuando $x\to 1$, las infinitesimales $1-x$ y $1-\sqrt[3]{x}$ son del mismo orden. ¿Serán equivalentes? *Respuesta*: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$, por consiguiente, las infinitesimales son de un mismo orden, pero no son equivalentes.

CAPITULO III

DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 1. VELOCIDAD DEL MOVIMIENTO

Examinemos el movimiento rectilíneo de un cuerpo sólido, por ejemplo, el de una piedra lanzada verticalmente hacia arriba o el de un pistón en el cilindro de un motor.

Haciendo abstracción de las dimensiones y configuración concretas del cuerpo, imaginémoslo en adelante como un punto móvil M. La distancia s del punto móvil, que se mide a partir de cierta posición inicial M_0, dependerá del tiempo t, es decir, s será función de t:

$$s = f(t). \tag{1}$$

Supongamos que en un instante dado* t, el punto móvil M se encuentre a la distancia s de la posición inicial M_0 y unos instantes después, $t + \Delta t$, se encontrará en la posición M_1, a la distancia $s + \Delta s$ de la posición inicial (fig. 56). Por consiguiente, durante el intervalo de tiempo Δt el espacio recorrido s ha cambiado en una magnitud Δs. Se dice que, en este caso, en el intervalo de tiempo Δt la magnitud s adquirió el incremento Δs.

Consideremos la razón $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Esta representa la velocidad media del punto durante el tiempo Δt:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Sin embargo, la velocidad media no puede caracterizar, en todos los casos, con la debida precisión, la rapidez del desplazamiento del punto M en el momento t. Así, por ejemplo, si el cuerpo al comienzo del intervalo Δt se desplaza con rapidez, mientras que al final de éste lo hace lentamente, la velocidad media no podrá reflejar estas peculiaridades del movimiento del punto y darnos una idea correcta de la velocidad real de su movimiento en el instante t.

*) Aquí, y en adelante, el valor concreto de una variable lo designaremos con la misma letra que empleamos para la propia variable.

Para expresar la velocidad real con mayor precisión, sirviéndose de la velocidad media, es necesario tomar un intervalo de tiempo Δt menor. El límite hacia el cual tiende la velocidad media, cuando $\Delta t \to 0$, caracteriza de la manera más completa la velocidad del punto en el instante t. Este límite se llama *velocidad del movimiento en el instante dado*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3}$$

Así, pues, la *velocidad del movimiento en el instante dado* se llama límite de la razón del incremento del espacio recorrido Δs al incremento de tiempo Δt, cuando éste último incremento tiende a cero.

Desarrollemos la igualdad (3).

Como

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

obtenemos

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{3'}$$

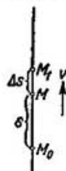


Fig. 56

que será la velocidad del movimiento no uniforme. De este modo vemos que el concepto de velocidad del movimiento no uniforme está estrechamente unido al de límite. Sólo a través del concepto de límite se puede determinar la velocidad del movimiento no uniforme.

De la fórmula (3') se deduce que v no depende del incremento de tiempo Δt, sino del valor t y del carácter de la función $f(t)$.

Ejemplo. Hallar la velocidad del movimiento uniformemente acelerado en un instante arbitrario t y en el $t = 2$ seg, si el espacio recorrido en función del tiempo se expresa por la fórmula siguiente:

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Solución. En el instante t se tiene: $s = \frac{1}{2} g t^2$, y en el instante $t + \Delta t$ tendremos:

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Calculemos ahora Δs: $\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} g t^2 = g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$ y tendremos la razón $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2}{\Delta t} = g t + \frac{1}{2} g \Delta t.$$

Según la definición de velocidad tenemos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2} g\Delta t \right) = gt.$$

Así pues, la velocidad en un instante t cualquiera es $v = gt$. Cuando $t = 2$ tenemos $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9{,}8 \cdot 2 = 19{,}6$ m/seg.

§ 2. DEFINICION DE LA DERIVADA

Sea

$$y = f(x), \tag{1}$$

una función definida en cierto intervalo. A cada valor del argumento x en este intervalo corresponde un valor determinado de la función $y = f(x)$.

Admitamos que el argumento x tome un incremento Δx, (positivo o negativo, no importa). Entonces, la función y tomará cierto incremento Δy. De este modo:

al valor del argumento x le corresponde $y = f(x)$,

al valor del argumento $x + \Delta x$ le corresponde $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Calculemos el incremento de la función Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Veamos la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Hallemos el límite de esta razón, cuando $\Delta x \to 0$. Si existe este límite se llama *derivada* de la función dada $f(x)$ y se designa por $f'(x)$. Según la definición tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

o sea,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Por consiguiente, se llama *derivada* de la función dada $y = f(x)$, respecto al argumento x, el límite de la razón del incremento de esta función Δy al incremento del argumento Δx, cuando éste tiende a cero de manera arbitraria.

Observemos que en el caso general, a cada valor de x le corresponde un valor determinado de la derivada $f'(x)$, es decir, la derivada es también *función de x*.

Simultáneamente con la notación $f'(x)$ para la derivada se emplean también, otras designaciones. Por ejemplo:

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

El valor concreto de la derivada, para $x = a$, se designa por $f'(a)$ o $y'|_{x=a}$.

La operación que tiene por objeto hallar la derivada de la función $f(x)$, se llama *derivación* de esta función (se usa también el término «*diferenciación*»).

Ejemplo 1. Dada la función $y = x^2$. Hallar su derivada y':
1) en un punto cualquiera x,
2) para $x = 3$.

Solución. 1) Cuando el valor del argumento es igual a x, $y = x^2$. Cuando el valor del argumento es igual a $x + \Delta x$, $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$.

Hallemos el incremento de la función

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Formemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Pasando al límite, encontraremos la derivada de la función:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Así, pues, la derivada de la función $y = x^2$ en un punto cualquiera se expresará por:

$$y' = 2x.$$

2) Para $x = 3$ obtendremos:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Ejemplo 2.

$$y = \frac{1}{x}; \text{ hallar } y'.$$

Solución. Como en el ejemplo anterior, tendremos

$$y = \frac{1}{x}; \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Observación. En el párrafo anterior se estableció que, si el espacio s recorrido por el punto móvil, en función del tiempo t, viene dado por la fórmula

$$s = f(t),$$

entonces la velocidad v en el instante t se expresará por la fórmula:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Por tanto,

$$v = s'_t = f'(t),$$

es decir, la velocidad es igual a la derivada* del espacio respecto al tiempo t.

§ 3. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Hemos llegado al concepto de derivada, examinando la velocidad del movimiento de un cuerpo (punto), es decir, partiendo de

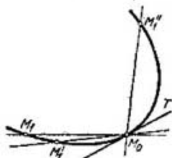


Fig. 57

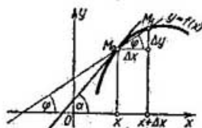


Fig. 58

razonamientos puramente *mecánicos*. Ahora daremos a la derivada otra interpretación, la *geométrica*, también muy importante.

Para ello es necesario, ante todo, definir la *tangente* a una curva en un punto dado.

Sea una curva y un punto fijo M_0 en ella. Tomemos en la curva otro punto M_1 y tracemos una secante M_0M_1 (fig. 57). Si el punto M_1 se aproxima ilimitadamente al punto M_0, desplazándose por la curva, la secante M_0M_1 ocupará las diversas posiciones M_0M_1', M_0M_1'', etc. Si, con la aproximación ilimitada del punto M_1 por la curva al punto M_0 (independientemente del lado por el que se aproxima), la secante tiende a ocupar la posición de una recta deter-

*) Cuando decimos «derivada respecto a x» o «derivada respecto al tiempo t», etc., tenemos en cuenta que, al hallar la derivada, la variable x o el tiempo t, etc., se consideran como argumentos.

minada M_0T, esta última se llama tangente a la curva en el punto M_0 (el concepto «tiende a ocupar» se precisará más adelante).

Examinemos la función $f(x)$ y la curva correspondiente,

$$y = f(x),$$

en el sistema de coordenadas rectangulares (fig. 58). A cierto valor de x le corresponde un valor de la función $y = f(x)$. A los valores dados de x e y les corresponde en la curva el punto $M_0(x, y)$. Demos al argumento x un incremento Δx. Al nuevo valor del argumento $x + \Delta x$ le corresponde un valor «incrementado» de la función $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. A éste último le corresponde en la curva el punto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Tracemos la secante M_0M_1 y designemos por φ el ángulo formado por la secante y la dirección positiva del eje Ox. Formemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. De la figura 58 se deduce que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \tag{1}$$

Cuando Δx tiende a cero, el punto M_1 se desplazará a lo largo de la curva, aproximándose al punto M_0. La secante M_0M_1 girará alrededor del punto M_0 y el ángulo φ variará, al variar Δx. Si, para $\Delta x \to 0$, el ángulo φ tiende a cierto límite α, la recta que pasa por el punto M_0 y que forma con la dirección positiva del eje de abscisas el ángulo α, será precisamente la tangente que se busca. Sin dificultad hallaremos el coeficiente angular de esta tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

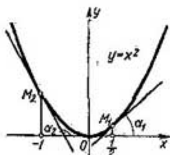


Fig. 59

Por tanto,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{2}$$

es decir, el *valor de la derivada $f'(x)$ correspondiente al valor dado del argumento x, será igual a la tangente del ángulo formado por la dirección positiva del eje Ox y la tangente a la curva de la función $f(x)$ en el punto correspondiente $M_0(x, y)$.*

Ejemplo. Hallar las tangentes de los ángulos de inclinación de la línea tangente a la curva $y = x^2$ en los puntos

$$M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); \quad M_2(-1, 1) \text{ (fig. 59)}.$$

Solución. En virtud del ejemplo 1 § 2, se tiene: $y' = 2x$; entonces:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = y'\Big|_{x=-1} = -2.$$

§ 4. DERIVACION DE LAS FUNCIONES

Definición. Si la función

$$y = f(x) \tag{1}$$

tiene derivada en el punto $x = x_0$, es decir, si existe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

se dice que para el valor dado $x = x_0$ la función es *derivable* o, lo que es lo mismo, tiene derivada.

Si la función es derivable en *cada punto* de un cierto segmento $[a, b]$ o intervalo (a, b), se dice que la función es *derivable sobre el segmento* $[a, b]$ o, respectivamente, *en el intervalo* (a, b).

Teorema. *Si la función* $y = f(x)$ *es derivable en un punto* $x = x_0$, *será continua en este punto.*

En efecto, si

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

donde γ es una magnitud que tiende a cero, cuando $\Delta x \to 0$. Pero en este caso

$$\Delta y = f'(x_0)\, \Delta x + \gamma \Delta x;$$

de donde se deduce que $\Delta y \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$, lo que quiere decir que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 (véase § 9 del capítulo II).

De este modo, en *los puntos de discontinuidad la función no puede tener derivada*. La recíproca no es cierta, es decir, que de la continuidad de la función $y = f(x)$ en cierto punto $x = x_0$ no se deduce que en este punto la función es necesariamente derivable: la función $f(x)$ puede no tener derivada en el punto x_0. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[0, 2]$ de la manera siguiente (fig. 60):

$$f(x) = x, \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1, \text{ cuando } 1 < x \leqslant 2.$$

Esta función no tiene derivada en $x = 1$, aunque es continua en este punto.

En efecto, cuando $\Delta x > 0$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta u)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[2(1+\Delta x)-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

cuando $\Delta x < 0$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[1+\Delta x]-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Es decir que este límite depende del signo de Δx, lo que significa, a su vez, que en el punto $x = 1$ la función no tiene derivada*. Geométricamente, esto

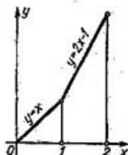


Fig. 60

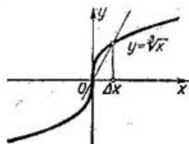


Fig. 61

significa que en el punto $x = 1$ la «curva» dada no tiene tangente determinada.

La continuidad de la función en el punto $x = 1$ se deduce de lo siguiente:

$$\Delta y = \Delta x, \text{ cuando } \Delta x < 0,$$

$$\Delta y = 2\Delta x, \text{ cuando } \Delta x > 0.$$

Por tanto, en ambos casos $\Delta y \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

Ejemplo 2. La función $y = \sqrt[3]{x}$, cuya gráfica se muestra en la fig. 61, está definida y es continua para todos los valores de la variable independiente. Veamos, si esta función tiene derivada en el punto $x = 0$. Hallemos los valores de la función en $x = 0$ y en $x = 0 + \Delta x$. Cuando $x = 0$, tenemos $y = 0$. Cuando $x = 0 + \Delta x$, $y + \Delta y = \sqrt[3]{(\Delta x)}$.

Por consiguiente,

$$\Delta y = \sqrt[3]{(\Delta x)}.$$

Hallemos el límite de la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Así pues, la razón del incremento de la función al del argumento tiende al infinito en el punto $x = 0$, cuando $\Delta x \to 0$, y, por tanto, no tiene límite. Por consiguiente, esta función no es derivable en el punto $x = 0$. La tangente

*) Según la definición de derivada, es necesario que la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tienda a un mismo límite, cuando $\Delta x \to 0$, independientemente de la manera en que Δx tiende a cero.

a la curva en este punto forma con el eje de abscisas un ángulo $\frac{\pi}{2}$, es decir, coincide con el eje Oy.

§ 5. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES. DERIVADA DE LA FUNCION $y=x^n$, SIENDO n ENTERO Y POSITIVO

Para hallar la derivada de una función dada $y = f(x)$, basándose en la definición general de derivada, es necesario:

1) dar al argumento x un incremento Δx y calcular el valor incrementado de la función:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) hallar el incremento correspondiente de la función:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) formar la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4) calcular el límite de la razón mencionada, cuando $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Este método general de cálculo de derivadas lo emplearemos para obtener las derivadas de algunas funciones elementales.

Teorema. *La derivada de la función $y = x^n$ en la que n es un número entero y positivo, es igual a nx^{n-1}*, es decir,

$$\text{siendo } y = x^n, \quad y' = nx^{n-1}. \qquad \text{(I)}$$

Demostración. Sea la función

$$y = x^n.$$

1) Si x adquiere un incremento Δx, se tiene:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2) Según el binomio de Newton tenemos:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n$$

ó

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

3) Hallamos la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ \dots\ +(\Delta x)^{n-1}.$$

4) El límite de esta expresión será:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ \dots\ +(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

Por consiguiente, $y'=nx^{n-1}$, lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 1.

$$y=x^5,\ y'=5x^{5-1}=5x^4.$$

Ejemplo 2. $y=x$, $y'=1x^{1-1}$, $y'=1$. El último resultado tiene una interpretación geométrica muy sencilla: la línea tangente a la recta $y=x$ coincide con esta recta, sea cual fuese el valor de x, y, por tanto, forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a 1.

Observemos que la fórmula (I) es válida también, cuando n es negativo o fraccionario, como comprobaremos en el § 12.

Ejemplo 3. $y=\sqrt{x}$.

Representemos esta función en forma de potencia

$$y=x^{\frac{1}{2}}.$$

Según la fórmula (I) (teniendo en cuenta la observación que acabamos de hacer), obtenemos:

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

ó

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 4. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Representemos y en forma de función potencial

$$y=x^{-\frac{3}{2}}.$$

Entonces,

$$y'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

§ 6. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES $y = \operatorname{sen} x$; $y = \cos x$

Teorema 1. *La derivada de* sen x *es* cos x, *es decir,*

$$si\ y = \operatorname{sen} x,\ y' = \cos x. \qquad \text{(II)}$$

Demostración. Demos al argumento x un incremento Δx, entonces:

1) $y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x)$;

2) $$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

pero, puesto que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

se tiene:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Esta igualdad se obtiene, teniendo en cuenta que cos x es una función continua:

Teorema 2. *La derivada de* cos x es $-$sen x, es decir,

$$si\ y = \cos x,\ y' = -\operatorname{sen} x. \qquad \text{(III)}$$

Demostración: Demos al argumento x un incremento Δx. Entonces:

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2} \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= -2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

y, teniendo en cuenta que sen x es una función continua, finalmente tenemos:

$$y' = -\operatorname{sen} x.$$

§ 7. DERIVADAS DE UNA MAGNITUD CONSTANTE, DEL PRODUCTO DE UNA MAGNITUD CONSTANTE POR UNA FUNCION, DE UNA SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE

Teorema 1. *La derivada de una constante es igual a cero, es decir, si $y = C$ y $C = const$, se tiene $y' = 0$.* (IV)

Demostración. $y = C$ es una función de x tal que todos sus valores son iguales a C para cualquier x.

Por tanto, cualquiera que sea el valor de x, se tiene:

$$y = f(x) = C.$$

Demos al argumento x un incremento Δx ($\Delta x \neq 0$). Como la función y conserva el valor C para todos los valores del argumento, se tiene

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Esto quiere decir que el incremento de la función es igual a cero:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0.$$

La razón del incremento de la función al del argumento es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

y, por tanto,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

es decir, $y' = 0$.

Este resultado tiene una sencilla interpretación geométrica. La gráfica de la función $y = C$ es una recta paralela al eje Ox. Por tanto, la línea tangente a la gráfica coincide con esta recta en cada uno de sus puntos y, como consecuencia, forma con el eje Ox un ángulo cuya tangente y' es igual a cero.

Teorema 2. El *factor constante se puede escribir fuera del signo de derivada, es decir,*

si $y = Cu(x)$, donde $C = \text{const}$, *entonces* $y' = Cu'(x)$. (V)

Demostración. Razonando como en el teorema anterior, tenemos:

$$y = Cu(x),$$

$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{ es decir, } y' = Cu'(x).$$

Ejemplo 1. $y = 3\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

es decir,

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Teorema 3. *La derivada de la suma de un número finito de las funciones derivables es igual a la suma de las derivadas de estas funciones**).

Por ejemplo, en el caso de tres sumandos tenemos:

$$y = u(x) + v(x) + w(x);\ y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \qquad \text{(VI)}$$

Demostración: Para los valores del argumento x se tiene:

$$y = u + v + w$$

(para abreviar, omitimos x en la designación de la función).

Para el valor del argumento $x + \Delta x$ tenemos:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w);$$

donde Δy, Δu, Δv y Δw son incrementos de las funciones y, u, v y w, que corresponden al incremento Δx del argumento x. Por consiguiente,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

ó

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

Ejemplo 2. $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1},$$

es decir,

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Teorema 4. *La derivada del producto de dos funciones derivables es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda, más el producto de la primera función por la derivada de la segunda, es decir, si* $y = uv$, *entonces* $y' = u'v + uv'$. (VII)

Demostración. De un modo análogo al teorema anterior, obtenemos:

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \Delta v,$$

*) La expresión $y = u(x) - v(x)$ es idéntica a la expresión $y = u(x) + (-1)v(x)$ y, por consiguiente,

$$y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

ya que u y v no dependen de Δx.

Analicemos el último término del segundo miembro

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Puesto que la función $u(x)$ es derivable, será también continua. Por tanto, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$. Además

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'\neq\infty.$$

Así, el término examinado es igual a cero y en definitiva tenemos:

$$y'=u'v+uv'$$

Basándonos en el teorema demostrado se deduce fácilmente la regla para la derivación del producto de cualquier número de funciones.

Si tenemos, por ejemplo, el producto de tres funciones

$$y=uvw,$$

entonces, representando el segundo miembro como producto de u y (vw) obtenemos: $y'=u'(vw)+u(vw)'=u'vw+u(v'w+$ $+vw')=u'vw+uv'w+uvw'$. De la misma manera se deduce una fórmula análoga para la derivada del producto de cualquier número (finito) de funciones. Es decir, si $y=u_1u_2\ldots u_n$, tenemos:

$$y'=u_1'u_2\ldots u_{n-1}u_n+u_1u_2'\ldots u_{n-1}u_n+\ldots+u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n'.$$

Ejemplo 3. Si $y=x^2\operatorname{sen}x$, se tiene:

$$y'=(x^2)'\operatorname{sen}x+x^2(\operatorname{sen}x)'=2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x.$$

Ejemplo 4. Si $y=\sqrt{x}\operatorname{sen}x\cos x$, se tiene:

$$y'=(\sqrt{x})'\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}(\operatorname{sen}x)'\cos x+\sqrt{x}\operatorname{sen}x(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}\cos x\cos x+\sqrt{x}\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)=\frac{\operatorname{sen}2x}{4\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos 2x.$$

Teorema 5. *La derivada de una fracción (es decir, del cociente de la división de una función por otra) es igual a otra fracción que tiene por denominador el cuadrado del denominador de la fracción dada y por numerador, la diferencia entre el producto del denominador por la derivada del numerador y el producto del numerador por la derivada del denominador; es decir si* $y = \frac{u}{v}$, *se tiene* $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. (VIII)

Demostración. Si Δy, Δu y Δv son los incrementos de las funciones y, u, v que corresponden al incremento Δx del argumento x entonces se tiene:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}.$$

Observando que $\Delta v \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$*), obtenemos:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ejemplo 5. Si $y = \frac{x^3}{\cos x}$, tendremos:

$$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

Observación. Dada una función del tipo

$$y = \frac{u(x)}{C},$$

en la que el denominador C es una constante, para derivar esta función no hace falta recurrir a la fórmula (VIII); en este caso es más

*) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, ya que la función $v(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua.

conveniente la fórmula (V):

$$y' = \left(\frac{1}{C}u\right)' = \frac{1}{C}u' = \frac{u'}{C}.$$

Es obvio que este mismo resultado se obtiene, aplicando la fórmula (VIII).

Ejemplo 6. Si $y = \frac{\cos x}{7}$, tendremos:

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\operatorname{sen} x}{7}.$$

§ 8. DERIVADA DE LA FUNCION LOGARITMICA

Teorema. *La derivada de la función* $\log_a x$ *es igual a* $\frac{1}{x}\log_a e$, *es decir, si* $y = \log_a x$, *se tiene* $y' = \frac{1}{x}\log_a e$. (IX)

Demostración. Supongamos que Δy es el incremento de la función $y = \log_a x$, correspondiente al incremento Δx del argumento x. Entonces:

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Multiplicando y dividiendo por x el segundo miembro de la última igualdad obtendremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,\frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Designemos por α la magnitud $\frac{\Delta x}{x}$. Para un valor dado de x, $\alpha \to 0$, si $\Delta x \to 0$. Por tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Sin embargo, como se sabe, (§ 7, cap. II),

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Si la expresión que se halla bajo el signo de logaritmo tiende al número e, el logaritmo de ésta tiende hacia $\log_a e$ (en virtud de la continuidad de la función logarítmica). Según esto, tendremos en definitiva:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Considerando que $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, la fórmula obtenida puede escribirse como sigue:

$$y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}.$$

Veamos el siguiente caso particular. Si en esta fórmula $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, es decir, cuando $y = \ln x$, se tiene

$$y' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(X)}$$

§ 9. DERIVADA DE LA FUNCION COMPUESTA

Supongamos $y = f(x)$ una función compuesta, es decir, una función tal que pueda ser representada en la forma siguiente:

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x)$$

o $y = F[\varphi(x)]$ (cap. I, § 8). La variable u en la expresión $y = F(u)$ se *denomina argumento (variable) intermedio.*

Establezcamos la regla de derivación de una función compuesta.

Teorema. *Si en cierto punto x la función $u = \varphi(x)$ tiene por derivada $u'_x = \varphi'(x)$ y la función $y = F(u)$ tiene por derivada $y'_u = F'(u)$ para el valor correspondiente de u, la función compuesta $y = F[\varphi(x)]$ en el punto dado x tendrá también derivada, cuya expresión será:*

$$y'_x = F'_u(u)\, \varphi'(x),$$

donde u debe ser sustituida por $u = \varphi(x)$. La fórmula obtenida se puede expresar en forma abreviada, como sigue:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

es decir que la derivada de una función compuesta es igual al producto de la derivada de la función dada respecto al argumento intermedio u por la derivada del argumento intermedio respecto a x.

Demostración. Para un valor determinado de x, se tiene:

$$u = \varphi(x), \; y = F(u).$$

Para el valor incrementado del argumento $x + \Delta x$, tenemos:

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \; y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Al incremento Δx le corresponde el incremento Δu, al que, a su vez, corresponde el incremento Δy; además, cuando $\Delta x \to 0$, Δu y Δy tenderán también a cero. Según la hipótesis:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Según la definición de límite, obtendremos (para $\Delta u \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \tag{1}$$

donde $\alpha \to 0$, cuando $\Delta u \to 0$. Escribamos la ecuación (1) en la forma:

$$\Delta y = y'_u \, \Delta u + \alpha \, \Delta u. \tag{2}$$

Sea cual fuese α, la ecuación (2) se verifica también para $\Delta u = 0$, puesto que se convierte en identidad, $0 = 0$. Cuando $\Delta u = 0$, suponemos que $\alpha = 0$. Dividiendo por Δx los dos miembros de la ecuación (2), tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

Según la hipótesis:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Pasando al límite en la ecuación (3), cuando $\Delta x \to 0$, hallaremos:

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{4}$$

Ejemplo 1. Dada la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$, hallar y'_x. Interpretemos la función propuesta como función de función:

$$y = \operatorname{sen} u, \quad u = x^2.$$

Tenemos $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$.

Por tanto, según la fórmula (4):

$$y'_x = y'_u\ u'_x = \cos u \cdot 2x$$

y sustituyendo u por su expresión, obtenemos en definitiva:

$$y'_x = 2x \cos (x^2).$$

Ejemplo 2. Dada la función $y = (\ln x)^3$, hallar y'_x. Representemos la función propuesta de la forma siguiente:

$$y = u^3,\ u = \ln x.$$

Tenemos

$$y'_u = 3u^2,\ u'_x = \frac{1}{x}.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3 (\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Si la función $y = f(x)$ es tal que puede ser representada en la forma

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

su derivada y'_x se obtiene, aplicando sucesivamente el teorema anterior.

Sabemos que

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Aplicando el mismo teorema para hallar u'_x, tenemos:

$$u'_x = u'_v v'_x,$$

y sustituyendo en la primera igualdad el factor u'_x por su expresión, obtenemos:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \tag{5}$$

ó

$$y'_x = F'_u(u)\, \varphi'_v(v)\, \psi'_x(x).$$

Ejemplo 3. Dada la función $y = \operatorname{sen} [(\ln x)^3]$, hallar y'_x. Representemos la función propuesta en la forma

$$y = \operatorname{sen} u,\ u = v^3,\ v = \ln x.$$

Tenemos:

$$y'_u = \cos u,\ u'_v = 3v^2,\ v'_x = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, según la fórmula (5):

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3 (\cos u)\, v^2 \frac{1}{x},$$

y finalmente:

$$y'_x = \cos [(\ln x)^3] \cdot 3 (\ln x)^2 \frac{1}{x}.$$

Hay que tener en cuenta que la función examinada está definida sólo cuando $x > 0$.

§ 10. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \ln |x|$

Teorema 1. *La derivada de la función* $y = \operatorname{tg} x$ *es igual a* $\frac{1}{\cos^2 x}$, *es decir, si* $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. (XI)

Demostración. Sea

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

de la fórmula para derivar fracciones (véase fórmula (VIII), § 7, capítulo III), se tiene:

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Teorema 2. *La derivada de la función* $y = \operatorname{cotg} x$ *es igual a* $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, *es decir:*

$$si\ \ y = \operatorname{cotg} x,\ \ y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \qquad \text{(XII)}$$

Demostración. Sea

$$y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

se tendrá

$$y' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - \cos x (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Ejemplo 1. Si $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

Ejemplo 2. Si $y = \ln \operatorname{cotg} x$,

$$y' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} (\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} = -\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}.$$

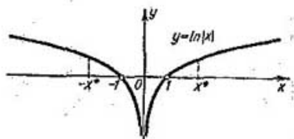


Fig. 62

Teorema 3. *La derivada de la función* $y = \ln|x|$ (fig. 62) *es igual a* $\frac{1}{x}$, es decir,

$$\text{si } y = \ln|x|, \; y' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(XIII)}$$

Demostración. a) Si $x > 0$, se tiene $|x| = x$, $\ln|x| = \ln x$, y por tanto:

$$y' = \frac{1}{x}.$$

b) Supongamos que $x < 0$. Entonces $|x| = -x$. Pero

$$\ln|x| = \ln(-x),$$

(observemos, que si $x < 0$, $-x > 0$).
Interpretemos la función $y = \ln(-x)$ como función compuesta, haciendo

$$y = \ln u; \; u = -x.$$

Entonces,

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

De este modo, para los valores negativos de x también se verifica la igualdad

$$y'_x = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, la fórmula (XIII) queda demostrada para cualquier valor de $x \neq 0$ (para $x = 0$ la función $\ln|x|$ no está definida).

§ 11. FUNCION IMPLICITA Y SU DERIVACION

Supongamos que los valores de dos variables, x e y, se encuentran ligados mediante una ecuación que, simbólicamente, escribiremos así:

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Si la función $y = f(x)$ definida en cierto intervalo (a, b) es tal que, al sustituir y en la ecuación (1) por la expresión $f(x)$, la ecuación

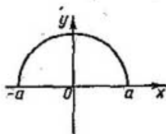


Fig. 63

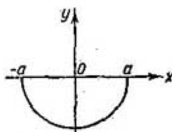


Fig. 64

se convierte en una identidad respecto a x, la función $y = f(x)$ recibe el nombre de función implícita determinada por la ecuación (1).

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

determina implícitamente las siguientes funciones elementales (figuras 63 y 64):

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4)$$

En efecto, al sustituir y por sus expresiones en la ecuación (2), la convertiremos en identidad, es decir

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Las expresiones (3) y (4) se han obtenido mediante la resolución de la ecuación (2) respecto a y. Sin embargo, no toda función dada implícitamente puede ser representada en forma explícita, es decir, en forma $y = f(x)$*, donde $f(x)$ es una función elemental.

---

*) Si la función viene dada en la forma $y = f(x)$, se dice que está dada en *forma explícita* o que es una función *explícita*.

Por ejemplo, las funciones dadas por las ecuaciones

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

ó

$$y - x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} y = 0,$$

no pueden ser expresadas mediante funciones elementales; es decir, no pueden ser resueltas respecto a y.

Observación 1. Es necesario señalar que los términos «función explícita» y «función implícita» no caracterizan la naturaleza de la función, sino la manera en que ésta viene dada.

Toda función explícita, $y = f(x)$, puede ser representada también en forma implícita, $y - f(x) = 0$.

Veamos cómo se obtiene la derivada de una función implícita, sin transformarla en explícita, es decir, sin representarla en la forma $y = f(x)$.

Supongamos que la función viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Si y es una función de x, determinada por la ecuación anterior, ésta será una identidad.

Al derivar ambos miembros de la identidad respecto a x, considerando que y es una función de x, obtendremos (aplicando la regla para derivar función compuesta):

$$2x + 2yy' = 0,$$

de donde:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Anotemos que, si derivamos la correspondiente función explícita

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

obtenemos:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

es decir, el mismo resultado.

Examinemos un ejemplo más de función implícita y en función de x:

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Derivemos respecto a x

$$6y^5y' - y' - 2x = 0,$$

y hallamos

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Observación 2. De los ejemplos citados se deduce que, si se trata de hallar la derivada de una función implícita para un valor dado del argumento x, es preciso conocer primeramente el valor de la función y para el mismo valor dado de x.

§ 12. DERIVADAS DE LA FUNCION POTENCIAL CON EXPONENTE REAL CUALQUIERA, DE LA FUNCION EXPONENCIAL Y DE LA FUNCION EXPONENCIAL COMPUESTA

Teorema 1. *La derivada de la función x^n, en la que n es un número real cualquiera, es igual a nx^{n-1}, es decir,*

$$\text{si } y = x^n, \text{ se tiene } y' = nx^{n-1}. \tag{I'}$$

Demostración. Supongamos que $x > 0$. Tomando logaritmos de la función dada, tendremos

$$\ln y = n \ln x.$$

Derivemos ambos miembros de la ecuación respecto a x, considerando que y es función de x:

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x}; \; y' = yn\frac{1}{x}.$$

Introduciendo aquí el valor $y = x^n$, obtenemos en definitiva:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Es fácil demostrar que esta fórmula es correcta también, cuando $x < 0$, siempre que x^n tenga sentido*).

Teorema 2. *La derivada de la función a^x, en la que $a > 0$, es igual a $a^x \ln a$, es decir,*

$$\text{si } y = a^x, \quad y' = a^x \ln a. \tag{XIV}$$

Demostración. Tomando logaritmos de la igualdad $y = a^x$, se tiene:

$$\ln y = x \ln a.$$

---

*) Dicha fórmula ha sido ya demostrada (§ 5, cap. III) para el caso en que n es un *número entero y positivo*. Ahora la fórmula (I) queda generalizada para cualquier número constante n.

Derivemos la igualdad obtenida, considerando y como función de x.

$$\frac{1}{y}y' = \ln a; \; y' = y \ln a,$$

o sea

$$y' = a^x \ln a.$$

Si la base es $a = e$, entonces $\ln e = 1$, y obtenemos la fórmula:

$$y = e^x, \; y' = e^x. \qquad \text{(XIV)}$$

Ejemplo 1. Dada la función

$$y = e^{x^2}.$$

Interpretémosla como función compuesta, introduciendo el argumento intermedio u:

$$y = e^u, \; u = x^2;$$

entonces,

$$y'_u = e^u, \; u'_x = 2x.$$

Por tanto,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

La función en la que tanto la base como el exponente son funciones de x se llama *función exponencial compuesta*. Por ejemplo, $(\operatorname{sen} x)^{x^3}$, $x^{\operatorname{tg} x}$, x^x, $(\ln x)^x$ y, en general, toda función de la forma

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v.^{*)}$$

Teorema 3.

$$\textit{Si } y = u^v, \textit{ entonces } y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u. \qquad \text{(XV)}$$

Demostración. Tomemos logaritmos de la función y:

$$\ln y = v \ln u.$$

Derivando respecto a x la igualdad obtenida, tenemos:

$$\frac{1}{y}y' = v\frac{1}{u}u' + v' \ln u,$$

de donde:

$$y' = y\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right).$$

Introduciendo la expresión $y = u^v$, obtenemos:

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

---

*) Tal función se suele llamar también *exponencial potencial* o *potencial exponencial*.

Así, pues, la derivada de la función exponencial compuesta consta de dos términos que se obtienen del siguiente modo: el primer sumando si, al derivar, suponemos que u es función de x, mientras que v es *constante* (u^v se interpreta como función *potencial*); el segundo, si suponemos que v es función de x, permaneciendo u *constante* (u^v se interpreta como función *exponencial*)

Ejemplo 2. Si $y=x^x$, $y'=xx^{x-1}(x')+x^x(x')\ln x$, o sea, $y'=x^x+x^x\ln x=x^x(1+\ln x)$.

Ejemplo 3. Si $y=(\operatorname{sen} x)^{x^2}$, tendremos

$$y'=x^2(\operatorname{sen} x)^{x^2-1}(\operatorname{sen} x)'+(\operatorname{sen} x)^{x^2}(x^2)'\ln\operatorname{sen} x=$$
$$=x^2(\operatorname{sen} x)^{x^2-1}\cos x+(\operatorname{sen} x)^{x^2}2x\ln\operatorname{sen} x.$$

El procedimiento, aplicado en este párrafo para calcular derivadas, consiste en hallar primeramente la derivada del *logaritmo de la función dada*. Este procedimiento se utiliza ampliamente en la derivación de funciones, y, a veces, simplifica mucho los cálculos.

Ejemplo 4. Hallar la derivada de la función

$$y=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}.$$

Solución. Tomando logaritmos, encontramos:

$$\ln y=2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-3\ln(x+4)-x.$$

Derivemos ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1.$$

Multiplicando por y, y sustituyendo y por $\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$, obtenemos

$$y'=\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x+4}-1\right].$$

Observación. La expresión $\frac{y'}{y}=(\ln y)'$, que es la derivada respecto a x del logaritmo natural de la función dada $y=y(x)$, se llama *derivada logarítmica*.

§ 13. FUNCION INVERSA Y SU DERIVACION

Supongamos

$$y=f(x) \tag{1}$$

es una función creciente (fig. 65) o decreciente definida en cierto intervalo (a, b) $(a<b)$ (§ 6, cap. I). Hagamos $f(a)=c$ y $f(b)=d$. Para concretar, en adelante consideraremos sólo la función creciente.

Examinemos dos valores diferentes x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo (a, b). De la definición de función creciente se deduce que, si $x_1<x_2$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, entonces $y_1<y_2$. Por tanto, a dos valores x_1 y x_2, les corresponden dos valores diferentes

y_1 e y_2 de la función. La recíproca también es cierta. Es decir, si $y_1 < y_2$, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, entonces, de la definición de función creciente, se deduce que $x_1 < x_2$. De este modo, entre los valores de x y los correspondientes de y se establece una relación biunívoca.

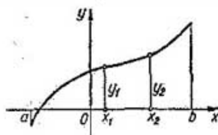


Fig. 65

Interpretando los valores de y como valores del argumento, y los valores de x como valores de la función, obtendremos x como función de y:

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Esta función se denomina *inversa* de la función $y = f(x)$.

Recíprocamente la función $y = f(x)$ es la inversa de la función $x = \varphi(y)$.

Razonando del mismo modo, se puede demostrar que una función decreciente también tiene su inversa.

Observación 1. Indiquemos, sin demostración, que, *si la función creciente (decreciente) $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, siendo $f(a) = c$ y $f(b) = d$, entonces la función inversa estará definida y será continua en el segmento $[c, d]$.*

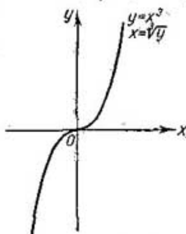


Fig. 66

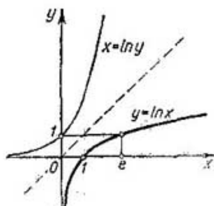


Fig. 67

Ejemplo 1. Sea la función $y = x^3$. Esta función es creciente en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ y su inversa es $x = \sqrt[3]{y}$ (fig. 66).

Observemos que la función inversa $x = \varphi(y)$ se halla, resolviendo la ecuación $y = f(x)$ respecto a x.

Ejemplo 2. Sea la función $y = e^x$. Esta función es creciente en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$; su inversa es $x = \ln y$. El dominio de definición de ésta es $0 < y < +\infty$ (fig. 67).

Observación 2. Si la función $y = f(x)$ no es creciente, ni decreciente en cierto intervalo, ella puede tener varias funciones inversas*).

Ejemplo 3. La función $y = x^2$ está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. No es creciente, ni decreciente, ni tampoco tiene función inversa. En el intervalo $0 \leqslant x < +\infty$ dicha función es creciente y su inversa es $x = \sqrt{y}$. En el intervalo $-\infty < x < 0$ la misma función será decreciente y su inversa es $x = -\sqrt{y}$ (fig. 68).

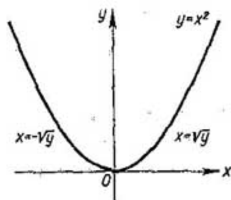


Fig. 68

Observación 3. Siendo $y = f(x)$ y $x = \varphi(y)$ funciones recíprocamente inversas, sus gráficas se representan por una misma curva.

Pero, si designamos por x el argumento de la función inversa y por y la propia función, entonces las gráficas de las dos funciones serán ya distintas en un mismo sistema de coordenadas.

Es fácil ver que las gráficas serán simétricas con respecto a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas.

Ejemplo 4. En la figura 67 están trazadas las gráficas de la función $y = e^x$ (o de $x = \ln y$) y de su inversa, $y = \ln x$, examinadas en el ejemplo 2.

El siguiente teorema nos permitirá calcular la derivada de la función $y = f(x)$, conociendo la derivada de la función inversa.

Teorema: *Si para la función*

$$y = f(x) \tag{1}$$

existe una función inversa

$$x = \varphi(y) \tag{2}$$

tal que en un punto analizado y tiene derivada $\varphi'(y)$, distinta de cero, entonces la función $y = f(x)$, en el punto correspondiente x, tiene derivada $f'(x)$, igual a $\frac{1}{\varphi'(y)}$, es decir, se verifica la fórmula

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{XVI}$$

*) Insistimos que, al decir que «y es función de x», entendemos que y depende de x de modo unívoco.

De este modo, la derivada de una de las dos funciones recíprocamente inversas es igual a la unidad dividida por la derivada de la segunda función, para los correspondientes valores de x e y*).

Demostración. Dando a y el incremento Δy, de la igualdad (2) deducimos

$$\Delta x = \varphi (y + \Delta y) - \varphi (y).$$

Como $\varphi (y)$ es una función monótona, se tiene $\Delta x \neq 0$. Escribamos la identidad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Por ser continua la función $\varphi (y)$, $\Delta x \to 0$, cuando $\Delta y \to 0$.

Tomando el límite, cuando $\Delta y \to 0$, en ambos miembros de la última identidad obtenemos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y},$$

o sea,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

es decir, llegamos a la fórmula (XVI).

Observación. La fórmula (XVI) se puede obtener también, aplicando el teorema de derivación de funciones compuestas.

En efecto, derivemos los dos miembros de la igualdad (2) respecto a x, considerando que y es función de x:

$$1 = \varphi'(y)\, y'_x,$$

de donde:

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

La interpretación geométrica es evidente. Examinemos la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 69). La misma curva será la gráfica

---

*) Cuando escribimos $f'(x)$ o y'_x, consideramos que, al calcular la derivada, tomamos x como variable independiente. Cuando escribimos $\varphi'(y)$ o x'_y, consideramos que, al calcular la derivada, la variable independiente es y. Observemos que *después de obtener la derivada respecto a y que figura en el 2° miembro de la fórmula (XVI), es necesario sustituir y por $f(x)$.*

de la función $x = \varphi(y)$ en la que x se considera como función e y, como variable independiente. Consideremos un punto $M(x, y)$ de esta curva. Tracemos una tangente a la misma en este punto. Los ángulos formados por la tangente mencionada y las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy los designaremos por α y β respectivamente. En virtud de los resultados obtenidos en el § 3, acerca del significado geométrico de la derivada, tenemos:

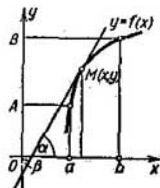


Fig. 69

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{tg}\alpha \\ \varphi'(y) &= \operatorname{tg}\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

De la figura 69 se deduce que, si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, se tiene:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ahora bien, si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, naturalmente $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$.

Por consiguiente, en cualquier caso

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha$$

de donde

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1,$$

o sea

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Introduciendo aquí las expresiones de $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ de la fórmula (3), obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 14. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS Y SU DERIVACION

1) Función: $y = \operatorname{arcsen} x$.

Examinemos la función

$$x = \operatorname{sen} y \qquad (1)$$

y construyamos su gráfica, dirigiendo el eje Oy verticalmente hacia arriba (fig. 70). Esta función está definida en el invervalo infinito $-\infty < y < +\infty$. En el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, la función $x = \operatorname{sen} y$

es creciente, sus valores llenan el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Por eso la función $x = \operatorname{sen} y$ tiene su inversa, que se escribe así: $y = \operatorname{arcsen} x$*).

Esta función está definida en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, sus valores llenan el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. En la figura 70 la gráfica de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ va en línea gruesa.

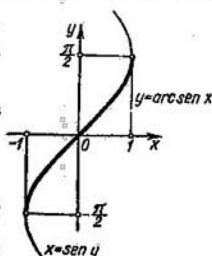


Fig. 70

Teorema 1. *La derivada de la función* $\operatorname{arcsen} x$ *es igual a* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es decir,

si $y = \operatorname{arcsen} x$, *se tiene* $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (XVIII)

Demostración. Según la igualdad (1) tenemos:

$$x'_y = \cos y,$$

y conforme a la regla para derivar la función inversa, será:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

pero

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Entonces

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La raíz lleva el signo positivo, porque el valor de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ se encuentra en el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ de donde $\cos y \geqslant 0$.

Ejemplo 1. $y = \operatorname{arcsen} e^x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Ejemplo 2. $y = \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{x}\right)^2$,

$$y' = 2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

*) Observemos que la igualdad $y = \operatorname{arcsen} x$ conocida del curso de trigonometría, es otra forma de escribir la igualdad (1). Aquí (dado x), y significa conjunto de valores de los ángulos, cuyo seno es igual a x.

2) Función: $y = \arccos x$.

Como en el caso anterior, examinemos la función

$$x = \cos y, \tag{2}$$

construyamos su gráfica y dirijamos el eje Oy hacia arriba (fig. 71). Esta función está definida en el intervalo infinito $-\infty < y < +\infty$. En el segmento $0 \leqslant y \leqslant \pi$ la función $x = \cos y$ es decreciente y tiene su inversa designada así:

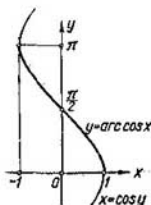


Fig. 71

$$y = \arccos x.$$

Esta función está definida en el segmento $-1 \leqslant x < 1$. Los valores de la función llenan el segmento $\pi \geqslant y \geqslant 0$. En la figura 71 la gráfica de la función $y = \arccos x$ va en línea gruesa.

Teorema 2. *La derivada de la función* arccos *x es igual a* $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es decir, si $y = \arccos x$, *se tiene* $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **(XVIII)**

Demostración. Según la igualdad (2) tenemos:

$$x'_y = -\operatorname{sen} y.$$

Por tanto,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Pero $\cos y = x$, entonces:

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En la igualdad $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ la raíz lleva el signo positivo, porque los valores de la función $y = \arccos x$ se encuentran en el segmento $0 \leqslant y \leqslant \pi$, por consiguiente $\operatorname{sen} y \geqslant 0$.

Ejemplo 3. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\,\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Función: $y = \operatorname{arctg} x$.

Examinemos la función

$$x = \operatorname{tg} y$$

y construyamos su gráfica (fig. 72). Esta función está definida para todos los valores de y, excepto $y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. En el intervalo $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ la función $x = \operatorname{tg} y$ es creciente y tiene su inversa:

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

La función está definida en el intervalo $-\infty < x < +\infty$ y sus valores llenan el intervalo $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. En la figura 72, la gráfica de la función $y = \operatorname{arctg} x$ va en línea gruesa.

Teorema 3. *La derivada de la función* arctg x *es igual a* $\frac{1}{1+x^2}$, es decir, *si* $y = \operatorname{arctg} x$, *se tiene* $y' = \frac{1}{1+x^2}$. (XIX)

Demostración. Según la igualdad (3) tenemos:

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Por tanto,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

pero

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y};$$

y, puesto que $\operatorname{tg} y = x$, tenemos en definitiva:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ejemplo 4. $y=(\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 (\operatorname{arctg} x)' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 \frac{1}{1+x^2}.$$

4) Función: $y = \operatorname{arccotg} x$.
Examinemos la función

$$x = \operatorname{cotg} y. \quad (4)$$

Esta función está definida para todos los valores de y, excepto $y = k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2)$. La gráfica de la función está representada

en la figura 73. En el intervalo $0 < y < \pi$ la función $x = \operatorname{cotg} y$ es decreciente y tiene su inversa, la cual se designa así:

$$y = \operatorname{arccotg} x.$$

La función, por tanto, está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ y sus valores llenan el intervalo $\pi > y > 0$.

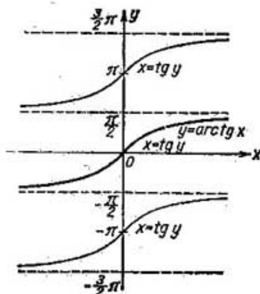


Fig. 72

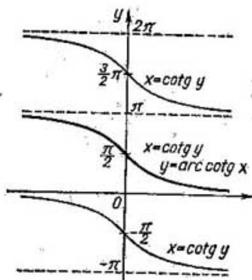


Fig. 73

Teorema 4. *La derivada de la función* arccotg x *es igual a* $-\frac{1}{1+x^2}$, es decir,

$$\textit{si } y = \operatorname{arccotg} x, \textit{ se tiene } y' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XX)}$$

Demostración: Según la igualdad (4):

$$x'_y = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 y}.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = -\operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 y}.$$

Pero

$$\operatorname{cotg} y = x.$$

Luego,

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 15. TABLA DE LAS FORMULAS FUNDAMENTALES PARA LA DERIVACION

Agrupamos ahora en una tabla todas las fórmulas fundamentales y reglas de derivación, obtenidas en los párrafos anteriores.

Fórmulas fundamentales

$$y = \text{const}, \; y' = 0.$$

Función potencial:

$$y = x^{\alpha}, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1};$$

en particular,

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Funciones trigonométricas:

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\operatorname{sen} x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \quad y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Funciones trigonométricas inversas:

$$y = \operatorname{arcsen} x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \arccos x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Función exponencial:

$$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a;$$

en particular,

$$y=e^x, \quad y'=e^x.$$

Función logarítmica:

$$y=\log_a x, \quad y'=\frac{1}{x}\log_a e;$$

en particular,

$$y=\ln x, \quad y'=\frac{1}{x}.$$

Reglas generales de derivación:

$$y=Cu(x), \qquad y'=Cu'(x) \quad (C=\text{const}),$$

$$y=u+v-w, \qquad y'=u'+v'-w',$$

$$y=u\cdot v, \qquad y'=u'v+uv',$$

$$y=\frac{u}{v}, \qquad y'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

$$\left.\begin{array}{l} y=f(u), \\ u=\varphi(x), \end{array}\right\} \qquad y'_x=f'_u(u)\,\varphi'_x(x),$$

$$y=u^v, \qquad y'=vu^{v-1}u'+u^v v'\ln u.$$

Si $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$, donde f y φ son funciones recíprocamente inversas, entonces:

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}, \text{ donde } y=f(x).$$

§ 16. REPRESENTACION PARAMETRICA DE FUNCION

Consideremos dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{array}\right\} \tag{1}$$

donde t toma valores comprendidos en el segmento $[T_1, T_2]$. A cada valor de t le corresponde los de x y de y (suponemos que φ y ψ son funciones unívocas). Considerando que los valores de x y de y son las coordenadas de un punto en el plano Oxy, a cada valor de t le corresponderá un punto determinado del plano. Este punto describe cierta curva en el plano, cuando t varía de T_1 hasta T_2. Las ecuaciones (1) se denominan *ecuaciones paramétricas* de esta curva; t toma el nombre de *parámetro* y el método de dar la curva mediante las ecuaciones (1) se llama método *paramétrico*.

Supongamos ahora que la función $x = \varphi(t)$ tenga su inversa $t = \Phi(x)$. Es evidente que y, en este caso, es función de x:

$$y = \psi[\Phi(x)]. \tag{2}$$

De este modo, las ecuaciones (1) determinan y en función de x y se dice que la función y de x viene representada paramétricamente.

La expresión $y = f(x)$ que muestra como y depende directamente de x, se obtiene eliminando el parámetro t de las ecuaciones (1).

El método paramétrico de dar las curvas se usa ampliamente en mecánica. Si en el plano Oxy se desplaza un punto material y se conocen las leyes del movimiento de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas,

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} \tag{1'}$$

donde el parámetro t es el tiempo, las ecuaciones (1') serán las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto en movimiento. Eliminando en estas ecuaciones el parámetro t, obtendremos la ecuación de la trayectoria en la forma $y = f(x)$ o en la forma $F(x, y) = 0$.

Ilustremos esto.

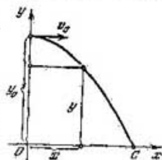


Fig. 74

Problema. Hállese la trayectoria y el punto de caída de un cuerpo arrojado desde un avión que se desplaza horizontalmente a la altura y_0 con velocidad v_0 (se puede prescindir de la resistencia del aire).

Solución. Tomomos el sistema de coordenadas que muestra la figura 74. Suponemos que el cuerpo es arrojado en el instante en que el avión cruza el eje Oy. Es evidente que el desplazamiento horizontal del cuerpo será uniforme con la velocidad constante v_0:

$$x = v_0 t.$$

La caída vertical del cuerpo por efecto de la gravedad se expresa mediante la fórmula:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Por tanto, en cualquier instante, la distancia del cuerpo a la tierra se expresará por la fórmula:

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Las igualdades

$$\begin{array}{l} x = v_0 t, \\ y = y_0 - \dfrac{gt^2}{2}, \end{array}$$

son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Para eliminar el parámetro t hallamos de la ecuación primera su valor $t = \frac{x}{v_0}$ y hacemos en la segunda

ecuación la sustitución correspondiente, obteniendo entonces la ecuación de la trayectoria

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Esta es la ecuación de la parábola, cuyo vértice se encuentra en el punto M $(0, y_0)$, sirviéndole Oy de eje de simetría.

Determinemos la magnitud del segmento OC. Designemos por X la abscisa del punto C, cuya ordenada es $y = 0$. Introduciendo estos valores en la fórmula anterior, tendremos:

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2,$$

de donde:

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. ECUACIONES PARAMETRICAS DE ALGUNAS CURVAS

Circunferencia. Supongamos una circunferencia de radio r, con centro en el origen de las coordenadas (fig. 75).

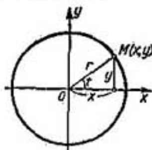


Fig. 75

Designemos con t el ángulo formado por el radio trazado por el punto M (x, y) de la circunferencia y el eje Ox. Entonces, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia se expresarán por medio del parámetro t como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos t, \\ y = r \operatorname{sen} t, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Estas son ecuaciones paramétricas de la circunferencia. Si eliminamos en estas ecuaciones el parámetro t, obtendremos la ecuación de la circunferencia que contiene sólo x e y. Elevando al cuadrado las ecuaciones paramétricas y sumándolas, tenemos:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t),$$

o sea,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Elipse. Escribamos la ecuación de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

y hagamos

$$x = a\cos t. \qquad (2')$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1), obtendremos

$$y = b \operatorname{sen} t. \qquad (2'')$$

Las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t, \end{array}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \qquad (2)$$

son ecuaciones paramétricas de la elipse.

Aclaremos el significado geométrico del parámetro t. Tracemos dos circunferencias de radios a y b, con centro en el origen de coordenadas (fig. 76). Supongamos que el punto M (x, y) se halla en la elipse y el punto B, que tiene la misma abscisa que el punto M, pertenezca a la circunferencia de mayor radio. Designemos con t el ángulo formado por el radio OB y el eje Ox. De la figura se deduce

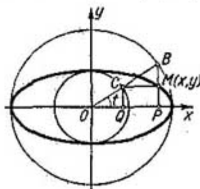


Fig. 76

$$x = OP = a\cos t \text{ [ecuación (2')]},$$

$$CQ = b \operatorname{sen} t.$$

En virtud de la ecuación (2″) deducimos que $CQ = y$, es decir, la recta CM es paralela al eje Ox. Por consiguiente, en las ecuaciones (2), t representa el ángulo formado por el radio OB y el eje de abscisas. A veces el ángulo t se denomina ángulo excéntrico.

Cicloide. Se da el nombre de cicloide a la curva descrita por un punto de la circunferencia, cuando ésta rueda sin resbalar sobre una línea recta (fig. 77). Supongamos que el punto M de la circunferencia coincide, al principio del movimiento, con el origen de coordenadas. Determinemos las coordenadas del punto M después

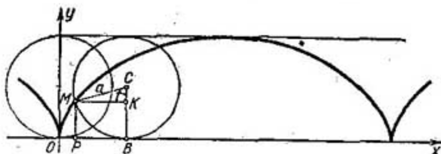


Fig. 77

de haber girado la circunferencia el ángulo t. Designemos por a el radio de la circunferencia en movimiento. Como se ve en la figura 77,

$$x = OP = OB - PB,$$

y teniendo en cuenta que la circunferencia rueda sin resbalar, tenemos:

$$OB = \widehat{MB} = at, \quad PB = MK = a \operatorname{sen} t.$$

Por tanto, $x = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t)$.

Luego,

$y = MP = KB = CB - CK = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$.

Las expresiones

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \operatorname{sen} t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{3}$$

son ecuaciones paramétricas de la cicloide. Cuando t varía de 0 a 2π, el punto M describe un arco de la cicloide.

Eliminando el parámetro t en estas ecuaciones, obtenemos la forma en que x directamente depende de y. En el segmento $0 \leqslant t \leqslant \pi$ la función $y = a(1 - \cos t)$ tiene por inversa

$$t = \arccos\frac{a-y}{a}.$$

Sustituyendo t en la primera ecuación del sistema (3) por su expresión, tendremos:

$$x = a \arccos\frac{a-y}{a} - a \operatorname{sen}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right),$$

ó

$$x = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \pi a.$$

De la figura se deduce que, si

$\pi a \leqslant x \leqslant 2\pi a$, se tiene:

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right).$$

Observemos que la función

$$x = a(t - \operatorname{sen} t)$$

tiene su inversa, pero ésta no se expresa mediante funciones elementales. Por eso la función $y = f(x)$ tampoco se expresa mediante funciones elementales.

Observación 1. En el ejemplo de la cicloide se ve que en algunos casos las ecuaciones paramétricas son más cómodas en el análisis de funciones y curvas, que la dependencia directa entre x e y.

Astroide. Se da el nombre de astroide a la curva representada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\operatorname{sen}^3 t, \end{aligned}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Elevando todos los términos de ambos miembros de las dos ecuaciones a la potencia 2/3 y sumándolas, obtenemos la dependencia entre x e y:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t),$$

o bien,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

Más adelante (§ 12, cap. V) demostremos que dicha curva tiene la forma que se expone en la figura 78. Esta curva puede interpretarse como trayectoria de un punto de la circunferencia de radio $\frac{a}{4}$, que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia de radio a, quedando siempre dentro de la mayor (fig. 78).

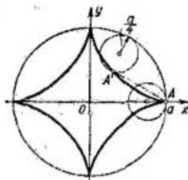


Fig. 78

Observación 2. Señalemos que la función $y = f(x)$ no es la única que se determina por las ecuaciones (4) y (5). Estas ecuaciones determinan en realidad dos funciones continuas en el segmento $-a \leqslant x \leqslant +a$, una de las cuales toma valores no negativos y la otra, valores no positivos.

§ 18. DERIVADA DE LA FUNCION DADA PARAMETRICAMENTE

Supongamos que la representación paramétrica de la función y de x es

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

y que, además, estas funciones tienen derivadas y la función $x = \varphi(t)$ tiene por inversa $t = \Phi(x)$ que, a su vez, también tiene derivada. En este caso, la función $y = f(x)$, definida por las ecuaciones paramétricas, puede ser interpretada como función compuesta

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x).$$

Aquí, t es el argumento intermedio.

Según la regla para derivar función compuesta, tenemos

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\, \Phi'_x(x). \tag{2}$$

Del teorema de derivación de función inversa tenemos:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Introduciendo esta expresión en la igualdad (2), obtenemos:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

o sea,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad \text{(XXI)}$$

Con la fórmula obtenida se puede calcular la derivada, y'_x, de la función dada paramétricamente, sin recurrir a la expresión de la dependencia directa de y en función de x.

Ejemplo 1. La función y de x está dada por ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t, \\ y = a\,\mathrm{sen}\, t, \end{array}\right\} (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$:

1) para cualquier valor de t;

2) para $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución.

1) $y'_x = \frac{(a\,\mathrm{sen}\, t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\,\mathrm{sen}\, t} = -\mathrm{cotg}\, t$;

2) $(y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{4} = -1$.

Ejemplo 2. Hallar el coeficiente angular de la línea tangente a la cicloide,

$$x = a(t - \mathrm{sen}\, t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

en un punto arbitrario $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Solución. El coeficiente angular de la tangente en cada punto es igual al valor de la derivada y'_x en este punto, es decir,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Pero

$$x'_t = a(1 - \cos t), \qquad y'_t = a\,\mathrm{sen}\, t,$$

y, por tanto,

$$y'_x = \frac{a\,\mathrm{sen}\, t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}} = \mathrm{cotg}\,\frac{t}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Por consiguiente, el coeficiente angular de la línea tangente a la cicloide en cada uno de sus puntos es igual a $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$, donde t es el valor del parámetro correspondiente a este punto. Esto último significa que el ángulo α de inclinación de la línea tangente con respecto al eje x es igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ (para los valores de t situados entre $-\pi$ y π)*).

*) En efecto, el coeficiente angular es igual a $\mathrm{tg}\,\alpha$, donde α es el ángulo

§ 19. FUNCIONES HIPERBOLICAS

En muchas aplicaciones del análisis matemático se encuentran combinaciones de las funciones exponenciales del tipo $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ y $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Estas combinaciones se consideran como funciones nuevas y se designan:

$$\left.\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\right\} \tag{1}$$

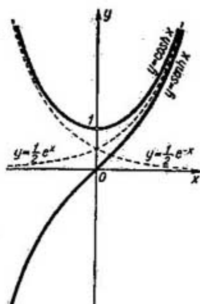


Fig. 79

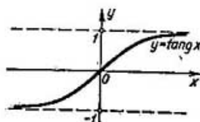


Fig. 80

La primera de estas funciones (1) se denomina *seno hiperbólico* y la segunda, *coseno hiperbólico*. Con estas funciones se pueden definir dos funciones más: $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ y $\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$, es decir,

$$\left.\begin{aligned} \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \textit{tangente hiperbólica} \\ \coth x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \textit{cotangente hiperbólica}. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

---

de inclinación de la línea tangente respecto al eje Ox. De aquí $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$ y $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ en aquellos valores de t, para los cuales $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ se halla entre 0 y π.

Las funciones senh x, cosh x, tanh x tienen por dominio, evidentemente, todos los valores de x. La función coth x tiene el mismo dominio, a excepción del punto $x = 0$.

Las gráficas de las funciones hiperbólicas están representadas en las figuras 79, 80, 81.

De la definición de las funciones senh x y cosh x [fórmulas (1)] se deducen correlaciones análogas a las conocidas entre las funciones trigonométricas correspondientes:

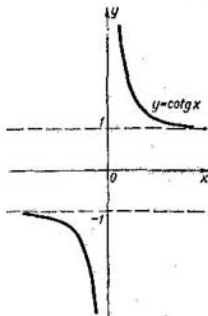


Fig. 81

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \tag{2}$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b, \tag{3}$$

$$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b. \tag{3'}$$

En efecto,

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$$

Considerando que

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

obtenemos:

$$\cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \cosh(a+b).$$

Del mismo modo se demuestra la fórmula (3').

El nombre «función hiperbólica» se debe a que las funciones senh t y cosh t desempeñan en la representación paramétrica de la hipérbola,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

el mismo papel que las funciones trigonométricas sen t y cos t en la representación paramétrica de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En efecto, eliminando el parámetro t en las ecuaciones

$$x = \cos t, \; y = \operatorname{sen} t,$$

obtendremos:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$$

ó

$x^2 + y^2 = 1$ (ecuación de la circunferencia).

Análogamente,

$$x = \cosh t,$$
$$y = \operatorname{senh} t$$

son ecuaciones paramétricas de la hipérbola.

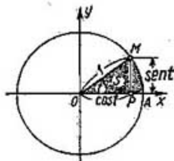


Fig. 82

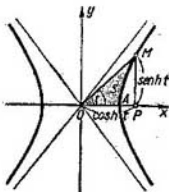


Fig. 83

En efecto, elevando al cuadrado estas ecuaciones y restando la segunda de la primera, obtendremos:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t.$$

Ya que la expresión del segundo miembro, según la (2), es igual a la unidad, tenemos:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola.

Examinemos la circunferencia, dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 82). En las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, el parámetro t equivale numéricamente al ángulo central AOM o al área doble S del sector AOM, ya que $t = 2S$.

Señalemos sin demostración que en las ecuaciones paramétricas de la hipérbola

$$x = \cosh t,$$
$$y = \operatorname{senh} t$$

el parámetro t es también numéricamente igual al área doble del «sector hiperbólico» AOM (fig. 83).

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se determinan por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{senh} x)' &= \cosh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ (\cosh x)' &= \operatorname{senh} x, \quad (\coth x)' = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXII)}$$

que se obtienen de la propia definición de función hiperbólica; por ejemplo, para la función $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, se tiene:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

§ 20. DIFERENCIAL

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre el segmento $[a, b]$. En un punto x del segmento $[a, b]$ la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un número determinado $f'(x)$ y, por tanto, se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

donde $\alpha \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

Multiplicando todos los términos de la última igualdad por Δx, obtenemos:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x. \qquad (1)$$

Dado que en el caso general $f'(x) \neq 0$, entonces, cuando x es constante y $\Delta x \to 0$, el producto $f'(x)\,\Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a Δx. El producto $\alpha\Delta x$

es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx, ya que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Así, pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nombre [cuando $f'(x) \neq 0$] de *parte principal* del incremento, que es *lineal* con relación a Δx. El producto $f'(x)\,\Delta x$ se denomina *diferencial* de la función y se designa por dy o $df(x)$.

De modo que, si la función $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ en el punto x, el producto de ésta por el incremento Δx, del argumento se llama *diferencial* de la función y se designa con el símbolo dy, o sea,

$$dy = f'(x)\ \Delta x. \qquad (2)$$

Hallemos la diferencial de la función $y = x$. En este caso

$$y' = (x)' = 1,$$

y, por tanto, $dy = dx = \Delta x$ o $dx = \Delta x$. De este modo, la *diferencial dx de la variable independiente x coincide con su incremento Δx.* La igualdad $dx = \Delta x$ podría ser considerada como definición de la diferencial de una variable independiente, y, en este caso, el ejemplo examinado demostraría que ello no contradice a la definición de diferencial de la función. En cualquier caso la fórmula (2) se puede escribir así:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Pero de esta correlación se desprende que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, *la derivada $f'(x)$ puede ser considerada como razón de la diferencial de la función respecto a la diferencial de la variable independiente.*

Teniendo en cuenta la fórmula (2), escribamos la fórmula (1) así:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \qquad (3)$$

Así, pues, el incremento de la función difiere de la diferencial de ésta en una magnitud infinitamente pequeña, de orden superior respecto a Δx. Si $f'(x) \neq 0$, $\alpha \Delta x$ es una infinitesimal de orden superior también respecto a dy, y, por tanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\,\Delta x}{f'(y)\,\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Esto nos permite, a veces, utilizar en los cálculos aproximados la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy, \tag{4}$$

o, en su forma desarrollada,

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x, \tag{5}$$

con lo cual se abrevian los cálculos.

Ejemplo 1. Calcular la diferencial dy y el incremento Δy de la función $y = x^2$:

1) para valores arbitrarios de x y Δx,
2) para valores $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Solución: 1) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,
$dy = (x^2)'\,\Delta x = 2x\Delta x$.

2) Si $x = 20$ y $\Delta x = 0{,}1$ entonces:

$$\Delta y = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01,$$
$$dy = 2\cdot 28\cdot 0{,}1 = 4{,}00.$$

El error que resulta de la sustitución de Δy por dy es igual a 0,01. En muchos casos se le puede despreciar, por considerarlo pequeño en comparación con $\Delta y = 4{,}01$.

El problema examinado se ilustra en la figura 84.

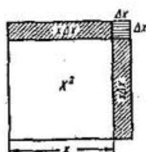


Fig. 84

En cálculos aproximados se usa también la igualdad aproximada que se obtiene de la ecuación (5):

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{6}$$

Ejemplo 2. Supongamos $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces,

$$f'(x) = \cos x.$$

En este caso, la igualdad aproximada (6) tomará la forma

$$\operatorname{sen}(x+\Delta x) \approx \operatorname{sen} x + \cos x\Delta x. \tag{7}$$

Calculemos el valor aproximado de sen 46°. Haciendo $x = 45° = \frac{\pi}{4}$, tenemos

$$\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180},$$

$$46° = 45° + 1° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}.$$

Introduciendo en (7) los valores calculados, obtenemos

$$\operatorname{sen} 46° = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\pi}{180},$$

o sea,

$$\operatorname{sen} 46° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 0{,}7071\cdot 0{,}017 = 0{,}7194.$$

Ejemplo 3. Si en la fórmula (7) hacemos $x=0$ y $\Delta x=\alpha$, obtendremos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha.$$

Ejemplo 4. Si $f(x)=\operatorname{tg} x$, según la fórmula (6), obtenemos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{tg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos^2 x}\Delta x,$$

cuando $x=0$ y $\Delta x=\alpha$, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$$

Ejemplo 5. Si $f(x)=\sqrt{x}$, la fórmula (6), nos da:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Haciendo $x=1$ y $\Delta x=\alpha$, obtenemos la igualdad aproximada:

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\frac{1}{2}\alpha.$$

El cálculo de la diferencial de una función se reduce en realidad al cálculo de la derivada, ya que, al multiplicar la última por la diferencial de argumento, se obtiene la diferencial de la función. Por tanto, la mayoría de los teoremas y fórmulas que se refieren a las derivadas, siguen siendo válidos también para las diferenciales. Por ejemplo:

La diferencial de la suma de dos funciones derivables u y v es igual a la suma de las diferenciales de estas funciones:

$$d(u+v)=du+dv.$$

La diferencial del producto de dos funciones derivables u y v se determina por la fórmula $d(uv)=u\,dv+v\,du$. Demostremos esta última fórmula. Si $y=uv$, se tiene:

$$dy=y'dx=(uv'+vu')\,dx=uv'dx+vu'dx,$$

pero

$$v'dx=dv,\ u'dx=du,$$

luego,

$$dy=u\,dv+v\,du.$$

Del mismo modo se demuestran las otras fórmulas; por ejemplo, la que determina la diferencial de un cociente:

$$\text{si}\quad y=\frac{u}{v},\quad \text{se tiene}\quad dy=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

Veamos algunos ejemplos de cálculo de la diferencial de una función.

Ejemplo 6. $y=\operatorname{tg}^2 x$, $dy=2\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

Ejemplo 7. $y=\sqrt{1+\ln x}$, $dy=\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\frac{1}{x}dx$.

Hallar la expresión de la diferencial de una función compuesta. Supongamos

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),\ \text{o}\ y=f[\varphi(x)].$$

Según la regla de derivación de función compuesta, se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=f'_u(u)\,\varphi'(x).$$

Por consiguiente,

$$dy=f'_u(u)\,\varphi'(x)\,dx,$$

pero $\varphi'(x)dx=du$, luego, $dy=f'(u)\,du$.

De modo que, *la diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que ésta tendría en caso de que el argumento intermedio u fuera la variable independiente*. En otras palabras, la *forma de la diferencial no depende de que el argumento de la función sea variable independiente o sea función de otro argumento*. Esta importante propiedad de la diferencial, que se conoce por *invariancia de la forma de la diferencial*, la usaremos con frecuencia en lo sucesivo.

Ejemplo 8. Sea la función $y=\operatorname{sen}\sqrt{x}$, hallar dy.
Solución. Interpretando esta función como función compuesta, se tiene:

$$y=\operatorname{sen} u,\quad u=\sqrt{x},$$

de donde

$$dy=\cos u\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx;$$

pero como $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$, se puede escribir:

$$dy=\cos u\,du\quad \text{ó}\quad dy=\cos(\sqrt{x})\,d(\sqrt{x}).$$

§ 21. SIGNIFICADO GEOMETRICO DE LA DIFERENCIAL

Examinemos la función

$$y=f(x)$$

y su correspondiente curva (fig. 85).

Tomemos en la curva $y=f(x)$ un punto arbitrario $M(x, y)$, tracemos una tangente a la curva en este punto y designemos por α el ángulo* formado por la tangente y la dirección positiva del

*) Suponiendo que la función $f(x)$ tenga derivada finita en el punto x, entonces $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$.

eje Ox. Demos a la variable independiente un incremento Δx; entonces la función recibirá el incremento $\Delta y = NM_1$. A los valores $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ corresponderá en la curva $y = f(x)$ el punto $M_1 (x + \Delta x,\ y + \Delta y)$.

En el triángulo MNT encontramos:

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha.$$

Como

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \quad MN = \Delta x,$$

tenemos

$$NT = f'(x) \Delta x.$$

Pero, según la definición de diferencial, $f'(x) \Delta x = dy$. Entonces, $NT = dy$.

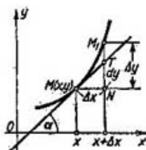


Fig. 85

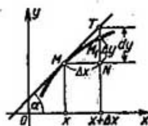


Fig. 86

Esta igualdad significa que la *diferencial de la función $f(x)$, correspondiente a los valores dados de x y Δx, es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto dado x.*

En la figura 85 se ve que

$$M_1T = \Delta y - dy.$$

Según lo demostrado antes, $\dfrac{M_1T}{NT} \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

No siempre Δy es mayor que dy.
Así, como se deduce de la fig. 86,

$$\Delta y = M_1N, \quad dy = NT, \quad \text{es decir,} \quad \Delta y < dy.$$

§ 22. DERIVADAS DE DIVERSOS ORDENES

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en un segmento $[a, b]$. Los valores de la derivada $f'(x)$ dependen de x, es decir, *la derivada $f'(x)$ también es función de x.* Derivando esta última función, obtendremos la llamada segunda derivada de la función $f(x)$.

La derivada de la primera derivada se denomina *derivada de segundo orden* o *segunda derivada* de la función primitiva y se designa

por el símbolo y'' o $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Por ejemplo, si $y = x^5$, se tiene

$$y' = 5x^4;\ y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

La derivada de la segunda derivada se denomina *derivada de tercer orden* o *tercera derivada* y se designa por y''', o sea, $f'''(x)$.

En general, la derivada (de primer orden) de la derivada del orden $(n-1)$ se denomina *derivada de n—ésimo orden de la función* $f(x)$ y se designa por el símbolo $y^{(n)}$ o $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(El orden de la derivada se pone entre paréntesis para no confundirlo con un exponente de potencia).

Las derivadas de cuarto, quinto, sexto, etc. órdenes pueden designarse también por cifras romanas: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, ... En este caso el orden de la derivada se puede escribir sin paréntesis. Por ejemplo, si $y = x^5$, se tiene:

$y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{IV} = y^{(4)} = 120x$, $y^{V} = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots\ldots = 0$.

Ejemplo 1. Sea la función $y = e^{kx}$ (k = const). Hallar la expresión general de su derivada de orden n.

Solución. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, . . ., $y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

Ejemplo 2. Sea la función $y = \operatorname{sen} x$. Hallar $y^{(n)}$.

Solución.

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV} = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Del mismo modo se obtienen las fórmulas de las derivadas de cualquier orden de otras funciones elementales.

Obtenga Vd., como ejercicio práctico, las fórmulas de las derivadas de n — ésimo orden de las funciones $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$.

Las reglas indicadas en los teoremas 2 y 3, § 7, se pueden generalizar para cualquier orden de derivadas.

En el caso dado, son evidentes las fórmulas:

$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$$

Demostremos la fórmula (llamada de Leibniz) para calcular la derivada de n—esimo orden del producto de dos funciones $u(x)\,v(x)$. Para obtener esta fórmula, hallemos primero varias derivadas consecutivas y establezcamos después la ley general aplicable para el cálculo de una derivada de cualquier orden:

$$\begin{aligned} y&=uv,\\ y'&=u'v+uv',\\ y''&=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',\\ y'''&=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=\\ &=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',\\ y^{IV}&=u^{IV}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{IV}. \end{aligned}$$

Se ve que la ley de la obtención de las derivadas es válida para derivadas de cualquier orden y es como sigue.

Se desarrolla la expresión $(u+v)^n$ por la fórmula del binomio de Newton y en la serie obtenida se sustituyen los exponentes de u y v por los índices del orden de las derivadas; además, los exponentes cero ($u^0=v^0=1$) que entran en los términos extremos del desarrollo, se sustituyen por las propias funciones (es decir, por las «derivadas del orden cero»):

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}.$$

Es decir, hemos obtenido la *fórmula de Leibniz.*

En rigor, se pudo llegar también a esta fórmula por el método de inducción matemática completa (es decir, demostrar de que, siendo válida la fórmula para el n —ésimo orden, es válida también para el orden $n+1$).

Ejemplo 3. Dada la función $y=e^{ax}x^2$. Hallar la derivada $y^{(n)}$.
Solución.

$$\begin{aligned} &u=e^{ax}, && v=x^2,\\ &u'=ae^{ax}, && v'=2x,\\ &u''=a^2e^{ax}, && v''=2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &u^{n}=a^{n}e^{ax}, && v'''=v^{IV}=\ldots=0, \end{aligned}$$

$$y^{(n)}=a^ne^{ax}x^2+na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2,$$

es decir,

$$y^{(n)}=e^{ax}\left[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}\right].$$

§ 23. DIFERENCIALES DE DIVERSOS ORDENES

Supongamos la función $y = f(x)$, donde x es una variable independiente. La diferencial de esta función,

$$dy = f'(x)\,dx,$$

es cierta función de x. Pero de x puede depender sólo el primer factor $f'(x)$, puesto que el segundo, (dx) es un incremento de la variable independiente x que no depende del valor de ésta. Como dy es función de x, se puede hablar de la diferencial de esta función.

La diferencial de la diferencial de una función se denomina *segunda diferencial* o *diferencial de segundo orden* de esta función y se designa por d^2y:

$$d(dy) = d^2y.$$

Hallemos la expresión de la segunda diferencial. En virtud de la definición general de diferencial, tenemos:

$$d^2y = [f'(x)\,dx]'\,dx.$$

Puesto que dx es independiente de x, al derivar, dx se escribe fuera del signo de la derivada. Así, tendremos

$$d^2y = f''(x)\,(dx)^2.$$

En la potencia de la diferencial se omite el paréntesis. Por ejemplo, en lugar de $(dx)^2$ se escribe dx^2, sobreentendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión dx; $(dx)^3$ se escribirá dx^3 y así sucesivamente.

Se llama *tercera diferencial* o *diferencial de tercer orden* de una función a la diferencial de la segunda diferencial de esta función:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)\,dx^2]'\,dx = f'''(x)\,dx^3.$$

En general, se llama *diferencial de n-ésimo orden* a la primera diferencial de la diferencial del orden $(n-1)$,

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}]'\,dx,$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n. \qquad (1)$$

Sirviéndonos de las diferenciales de diversos órdenes, la derivada de un orden cualquiera puede ser expresada como la razón de las diferenciales del orden correspondiente:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (2)$$

Conviene anotar, sin embargo, que las igualdades (1) y (2) (para $n > 1$) son válidas sólo en el caso de que x sea una variable independiente*).

§ 24. DERIVADAS DE DIVERSOS ORDENES DE FUNCIONES IMPLICITAS Y DE FUNCIONES REPRESENTADAS PARAMETRICAMENTE

1. Veamos con un ejemplo el método para obtener las derivadas de diversos órdenes de las funciones implícitas.

Supongamos que la función implícita y de x viene determinada por la igualdad

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{1}$$

Derivando respecto a x todos los términos de esta igualdad y teniendo en cuenta que y es función de x, resulta:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0;$$

de aquí hallamos

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}. \tag{2}$$

Volvamos a derivar la última igualdad respecto a x (teniendo en cuenta que y es función de x):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Sustituyendo aquí la derivada $\frac{dy}{dx}$ por su expresión en la igualdad (2), se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y+x\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}{y^2},$$

*) Sin embargo, la igualdad (2) la escribiremos también en el caso en que x no sea variable independiente, pero entonces, las expresiones $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ se deben considerar como representación simbólica de las derivadas.

y simplificando:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

De la ecuación (1) se deduce

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

luego, la segunda derivada puede ser presentada en la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Derivando la última igualdad respecto a x, hallamos $\frac{d^3y}{dx^3}$ y así sucesivamente.

2. Veamos ahora el modo de hallar las derivadas de órdenes superiores de la *función representada paramétricamente.*

Supongamos que la función y de x viene dada paramétricamente por

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t), \end{aligned}\right\}\quad t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

y la función $x=\varphi(t)$ en el segmento $[t_0, T]$ tiene su inversa, $t=\Phi(x)$.

Se ha demostrado en el § 18 que en este caso la derivada $\frac{dy}{dx}$ se determina por la igualdad

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{4}$$

Para hallar la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ derivemos respecto a x la igualdad (4), teniendo en cuenta que t es función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \tag{5}$$

pero

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Introduciendo las últimas expresiones en la fórmula (5), obtendremos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Esta fórmula se puede escribir en forma compacta así:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\,\psi''(t)-\psi'(t)\,\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

De la misma manera se puede hallar las derivadas

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\ \text{etc.}$$

Ejemplo. Sea la función y de x, cuya representación paramétrica es

$$x=a\cos t,\quad y=b\,\text{sen}\,t,$$

hallar las derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución.

$$\frac{dx}{dt}=-a\,\text{sen}\,t;\ \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t;$$

$$\frac{dy}{dt}=b\cos t;\ \frac{d^2y}{dt^2}=-b\,\text{sen}\,t;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\,\text{sen}\,t}=-\frac{b}{a}\,\text{cotg}\,t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\,\text{sen}\,t)(-b\,\text{sen}\,t)-(b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\,\text{sen}\,t)^3}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\text{sen}^3 t}.$$

§ 25. INTERPRETACION MECANICA DE LA SEGUNDA DERIVADA

El espacio s recorrido por un cuerpo en movimiento de traslación en función del tiempo t, se expresa así:

$$s = f(t). \qquad (1)$$

Como es sabido (§ 1, cap. III), la velocidad v del cuerpo en un instante dado es igual a la primera derivada del espacio recorrido respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt}. \qquad (2)$$

Supongamos que en cierto instante t la velocidad del cuerpo era v. Si el movimiento no es uniforme, en el intervalo de tiempo Δt a partir de t, la velocidad variará, recibiendo el incremento Δv.

Se denomina *aceleración media* en el tiempo Δt la razón del incremento de la velocidad Δv respecto al del tiempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Se denomina *aceleración en un instante dado* el límite de la razón del incremento de la velocidad respecto al del tiempo, cuando éste tiende a cero

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

es decir, la aceleración (en el instante dado) es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

pero como $v = \frac{ds}{dt}$, se tiene, por consiguiente:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

o sea que *la aceleración del movimiento rectilíneo es igual a la segunda derivada del espacio recorrido respecto al tiempo.* De la igualdad (1) tenemos

$$a = f''(t).$$

Ejemplo. Hallar la velocidad v y la aceleración a de un cuerpo que cae libremente en el espacio por efecto de la gravedad, si el espacio recorrido s depende del tiempo t, según la siguiente fórmula:

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0, \tag{3}$$

donde $g=9{,}8$ m/seg² es la aceleración de la gravedad

y $s_0=s_{t=0}$, el valor de s, cuando $t=0$.

Solución. Derivando, hallamos:

$$v=\frac{ds}{dt}=gt+v_0. \tag{4}$$

De esta fórmula se deduce $v_0=(v)_{t=0}$.
Derivando una vez más, hallamos:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=g.$$

Recíprocamente, si la aceleración de cierto movimiento permanece constante y es igual a g, la velocidad se expresará por la igualdad (4), y el espacio recorrido por la (3), a condición de que $(v)_{t=0}=v_0$ y $(s)_{t=0}=s_0$.

§ 26. ECUACIONES DE LA LINEA TANGENTE Y DE LA NORMAL. LONGITUDES DE LA LINEA SUBTANGENTE Y DE LA SUBNORMAL

Sea una curva cuya ecuación es

$$y=f(x).$$

Tomemos en esta curva un punto $M(x_1, y_1)$ (fig. 87) y escribamos la ecuación de la tangente a la curva dada en el punto M, suponiendo que esta tangente no sea paralela al eje de ordenadas.

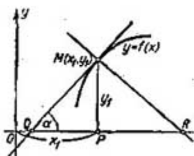


Fig. 87

La ecuación de una recta, del coeficiente angular k, que pasa por el punto M, es de la forma

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

En el caso de la tangente (§ 3),

$$k=f'(x_1).$$

Por tanto, la *ecuación de la tangente* será:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Conjuntamente con la tangente a la curva en el punto dado, surge con frecuencia la necesidad de estudiar la normal.

Definición. Se denomina *normal* a la curva en un punto dado, a la recta que, pasando por éste, es perpendicular a la tangente trazada por el mismo punto.

De la definición de normal se deduce que su coeficiente angular k_n está relacionado con el coeficiente angular k_t de la tangente de la manera siguiente:

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

es decir,

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Por tanto, la *ecuación de la normal* a la curva $y = f(x)$ en el punto $M(x_1, y_1)$ tiene la forma

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Ejemplo 1. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3$, en el punto $M(1, 1)$.

Solución. Puesto que $y' = 3x^2$, el coeficiente angular de la tangente es igual a $(y')_{x=1} = 3$. Por consiguiente, la ecuación de la tangente será

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ ó } y = 3x - 2.$$

La ecuación de la normal es:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

o sea,

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(fig. 88).

La longitud T del segmento de la tangente QM (fig. 87) comprendido entre el punto de tangencia y el eje Ox se denomina *longitud de la tangente*. La proyección del segmento indicado sobre el eje Ox, es decir, el segmento QP, se llama *subtangente* y su longitud se designa por S_T. La longitud N del segmento MR se llama *longitud de la normal* y la proyección RP del segmento RM sobre el eje Ox toma el nombre de *subnormal* y su longitud se designa por S_N.

Hallemos los valores T, S_T, N, S_N para la curva $y = f(x)$ y el punto $M(x_1, y_1)$.

En la figura 87 podemos observar que

$$QP = y_1 \operatorname{cotg} \alpha = \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y_1}{y_1'},$$

por tanto,

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y_1'} \right|;$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1}{y_1'} \sqrt{y_1'^2 + 1} \right|,$$

al mismo tiempo esta figura muestra que

$$PR = y_1 \operatorname{tg} \alpha = y_1 y_1',$$

y entonces

$$S_N = |y_1 y_1'|,$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = |y_1 \sqrt{1 + y_1'^2}|.$$

Las fórmulas indicadas han sido obtenidas en el supuesto de que $y_1 > 0$, $y_1' > 0$. Sin embargo, son válidas, también, para un caso cualquiera.

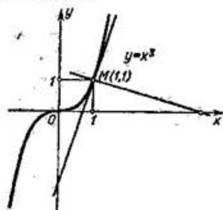


Fig. 88

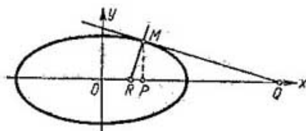


Fig. 89

Ejemplo 2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal y las longitudes de la tangente, subtangente, normal y subnormal de la elipse:

$$x = a \cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t \tag{1}$$

en el punto $M(x_1, y_1)$, en el cual $t = \frac{\pi}{4}$ (fig. 89).

Solución. De las ecuaciones (1) deducimos

$$\frac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Hallemos ahora las coordenadas del punto de tangencia M:

$$x_1=(x)_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad y_1=(y)_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Ecuación de la tangente: $y-\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, o sea, $bx+ay-ab\sqrt{2}=0$.

Ecuación de la normal:

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\ \text{ o sea, } (ax-by)\sqrt{2}-a^2+b^2=0.$$

Longitudes de la subtangente y de la subnormal:

$$S_T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right|=\frac{a}{\sqrt{2}};\quad S_N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right|=\frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Longitudes de la tangente y de la normal:

$$T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right|=\frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}.$$

§ 27. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA DEL RADIO VECTOR RESPECTO AL ANGULO POLAR

Supongamos que tenemos una curva cuya ecuación en coordenadas polares es

$$\rho=f(\theta). \tag{1}$$

Escribamos las fórmulas para transformar las coordenadas polares en cartesianas:

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Sustituyendo ρ en estas ecuaciones por su expresión mediante θ en la ecuación (1), tendremos:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\ y=f(\theta)\operatorname{sen}\theta. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) constituyen la representación paramétrica de la curva dada, sirviendo de parámetro el ángulo polar θ (fig. 90).

Designando por φ el ángulo formado por la tangente a la curva en cierto punto $M(\rho, \theta)$ con la dirección positiva del eje de abscisas,

tendremos

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}},\quad \text{o sea,}\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\dfrac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta}{\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta}. \qquad (3)$$

Designemos por μ el ángulo formado por el radio vector y la tangente. Evidentemente, $\mu=\varphi-\theta$

y

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}.$$

Sustituyendo $\operatorname{tg}\varphi$ por su expresión (3) y haciendo las transformaciones correspondientes, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{(\rho'\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta)\cos\theta-(\rho'\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{(\rho'\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta)\cos\theta+(\rho'\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta)\operatorname{sen}\theta}=\frac{\rho}{\rho'},$$

o bien

$$\rho'_\theta=\rho\operatorname{cotg}\mu. \qquad (4)$$

De modo que la derivada del radio vector respecto al ángulo polar es igual al producto de la longitud del primero por la cotangen-

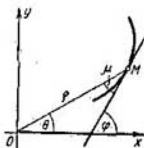


Fig. 90

te del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva en el punto dado.

Ejemplo.

Como ilustración, demostrar que la tangente a la espiral logarítmica $\rho=e^{a\theta}$ forma con el radio vector un ángulo constante.

Solución. De la ecuación de la espiral deducimos: $\rho'=ae^{a\theta}$. En virtud de la fórmula (4), obtenemos:

$$\operatorname{cotg}\mu=\frac{\rho'}{\rho}=a,\ \text{es decir},\ \mu=\operatorname{arccotg}a=\text{const}.$$

Ejercicios para el capítulo III

Partiendo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las funciones:

1. $y=x^3$. *Respuesta:* $3x^2$. 2. $y=\frac{1}{x}$. *Respuesta:* $-\frac{1}{x^2}$. 3. $y=\sqrt{x}$. *Respuesta:* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 4. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$. *Respuesta:* $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. 5. $y=\operatorname{sen}^2 x$. *Respuesta:* $2\operatorname{sen} x\cos x$. 6. $y=2x^2-x$. *Respuesta:* $4x-1$.

Determinar las tangentes de ángulos de inclinación de las líneas tangentes a las curvas:

7. $y=x^3$. a) Cuando $x=1$. *Respuesta:* 3. b) Cuando $x=-1$. *Respuesta:* 3; construir la gráfica. 8. $y=\frac{1}{x}$. a) Cuando $x=1/2$. *Respuesta:* -4. b) Cuando $x=1$. *Respuesta:* -1; construir la gráfica. 9. $y=\sqrt{x}$ cuando $x=2$. *Respuesta:* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Hallar las derivadas de las funciones:

10. $y=x^4+3x^2-6$. *Respuesta:* $y'=4x^3+6x$. 11. $y=6x^3-x^2$. *Respuesta:* $y'=18x^2-2x$. 12. $y=\frac{x^5}{a+b}-\frac{x^2}{a-b}-x$. *Respuesta:* $y'=\frac{5x^4}{a+b}-\frac{2x}{a-b}-1$. 13. $y=\frac{x^3-x^2+1}{5}$. *Respuesta:* $y'=\frac{3x^2-2x}{5}$. 14. $y=2ax^3-\frac{x^2}{b}+c$. *Respuesta:* $y'=6ax^2-\frac{2x}{b}$. 15. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x$. *Respuesta:* $y'=21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+2$. 16. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$. *Respuesta:* $y'=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}$. 17. $y=\frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$. *Respuesta:* $y'=\frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{\frac{5}{2}}}$. 18. $y=\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{n^2}{x^2}$. *Respuesta:* $y'=\frac{1}{m}-\frac{m}{x^2}+\frac{2x}{n^2}-\frac{2n^2}{x^3}$. 19. $y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+5$. *Respuesta:* $y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. 20. $y=\frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. *Respuesta:* $y'=\frac{5}{3}ax^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}bx^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$. 21. $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$. *Respuesta:* $y'=4x(1+3x+10x^3)$. 22. $y=x(2x-1)(3x+2)$. *Respuesta:* $y'=2(9x^2+x-1)$. 23. $y=(2x-1)(x^2-6x+3)$. *Resp.* $y'=6x^2-26x+12$. 24. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. 25. $y=\frac{a-x}{a+x}$. *Resp.* $y'=-\frac{2a}{(a+x)^2}$. 26. $f(t)=\frac{t^3}{1+t^2}$. *Resp.* $f'(t)=\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. 27. $f(s)=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. *Resp.* $f'(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. 28. $y=\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$. *Resp.* $y'=\frac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}$. 29. $y=\frac{x^p}{x^m-a^m}$. *Resp.*

$y'=\frac{x^{p-1}[(p-m)x^m-pa^m]}{(x^m-a^m)^2}$. 30. $y=(2x^2-3)^2$. *Resp.* $y'=8x(2x^2-3)$. 31. $y=(x^2+a^2)^5$. *Resp.* $y=10x(x^2+a^2)^4$. 32. $y=\sqrt{x^2+a^2}$. *Resp.* $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 33. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$. *Resp.* $y'=\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 34. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. 35. $y=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. *Resp.* $y'=\frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 36. $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$. *Resp.* $y'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. 37. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$. *Resp.* $y'=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$. 38. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times$ $\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. 39. $y=\operatorname{sen}^2 x$. *Resp.* $y'=\operatorname{sen} 2x$. 40. $y=2\operatorname{sen} x+\cos 3x$. *Resp.* $y'=2\cos x-3\operatorname{sen} 3x$. 41. $y=\operatorname{tg}(ax+b)$. *Resp.* $y'=\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$. 42. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{1+\cos x}$. 43. $y=\operatorname{sen} 2x\cos 3x$. *Resp.* $y'=2\cos 2x\cos 3x-3\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x$. 44. $y=\operatorname{cotg}^2 5x$. *Resp.* $y'=-10\operatorname{cotg} 5x\csc^2 5x$. 45. $y=t\operatorname{sen} t+\cos t$. *Resp.* $y'=t\cos t$. 46. $y=\operatorname{sen}^3 t\cos t$. *Resp.* $y'=\operatorname{sen}^2 t\,(3\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t)$. 47. $y=a\sqrt{\cos 2x}$. *Resp.* $y'=-\frac{a\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

48. $r=a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$. *Resp.* $r'_\varphi=a\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$. 49. $y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{x}$. *Resp.* $y'=-\frac{2x\cos x+\operatorname{sen}^2 x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right)}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$. 50. $y=a\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)^2$. *Resp.* $y'=2a\operatorname{sen}^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. 51. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. *Resp.* $y'=\operatorname{tg} x\operatorname{sc}^2 x$. 52. $y=\ln\cos x$. *Resp.* $y'=-\operatorname{tg} x$. 53. $y=\ln\operatorname{tg} x$. *Resp.* $y'-2/\operatorname{sen} 2x$. 54. $y=\ln\operatorname{sen}^2 x$. *Resp.* $y'=2\operatorname{cotg} x$. 55. $y=\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{sc} x}$. *Resp.* $y'=\operatorname{sen} x+\cos x$. 56. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\cos x}$. 57. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\cos x}$. 58. $y=\operatorname{sen}(x+a)\cos(x+a)$. *Resp.* $y'=\cos 2(x+a)$. 59. $f(x)=\operatorname{sen}(\ln x)$. *Resp.* $f'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$. 60. $f(x)=\operatorname{tg}(\ln x)$. *Resp.* $f'(x)=\frac{\operatorname{sc}^2(\ln x)}{x}$. 61. $f(x)=\operatorname{sen}(\cos x)$. *Resp.* $f'(x)=-\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$. 62. $r=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi-\operatorname{tg}\varphi+\varphi$. *Resp.* $\frac{dr}{d\varphi}=\operatorname{tg}^4\varphi$. 63. $f(x)=(x\operatorname{cotg} x)^2$. *Resp.* $f'(x)=2x\operatorname{cotg} x\,(\operatorname{cotg} x-x\csc^2 x)$.

64. $y=\ln(ax+b)$. *Resp.* $y'=a/(ax+b)$. 65. $y=\log_a(x^2+1)$. *Resp.* $y'=\frac{2x}{(x^2+1)\ln a}$. 66. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. *Resp.* $y'=\frac{2}{1-x^2}$. 67. $y=\log_3(x^2-\operatorname{sen} x)$. *Resp.* $y'=\frac{2x-\cos x}{(x^2-\operatorname{sen} x)\ln 3}$. 68. $y=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{4x}{1-x^4}$. 69. $y=\ln(x^2+x)$. *Resp.* $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$. 70. $y=\ln(x^3-2x+5)$. *Resp.* $y'=\frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.

71. $y=x\ln x$. *Resp.* $y'=\ln x+1$. 72. $y=\ln^3 x$. *Resp.* $y'=\frac{3\ln^2 x}{x}$. 73. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 74. $y=\ln(\ln x)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{x\ln x}$.
75. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Resp.* $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$. 76. $f(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$. *Resp.* $f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. 77. $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. *Resp.* $y'=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 78. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. *Resp.* $y'=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. 79. $y=-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$. 80. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}$. *Resp.* $y'=\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^3 x}$.
81. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$. *Resp.* $y'=\operatorname{tg}^3 x$. 82. $y=e^{ax}$. *Resp.* $y'=ae^{ax}$.
83. $y=e^{4x+5}$. *Resp.* $y'=4e^{4x+5}$. 84. $y=a^{x^2}$. *Resp.* $2xa^{x^2}\ln a$. 85. $y=7^{x^2+2x}$. *Resp.* $y'=2(x+1)\,7^{x^2+2x}\ln 7$. 86. $y=c^{a^2-x^2}$. *Resp.* $y'=-2xc^{a^2-x^2}\ln c$.
87. $y=ae^{\sqrt{x}}$. *Resp.* $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$. 88. $r=a^{\theta}$. *Resp.* $r'=a^{\theta}\ln a$. 89. $r=a^{\ln\theta}$. *Resp.* $\frac{dr}{d\theta}=\frac{a^{\ln\theta}\ln a}{\theta}$. 90. $y=e^x(1-x^2)$. *Resp.* $y'=e^x(1-2x-x^2)$.
91. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. *Resp.* $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. 92. $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{1+e^x}$.
93. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. 94. $y=e^{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $y'=e^{\operatorname{sen} x}\cos x$. 95. $y=a^{\operatorname{tg} nx}$. *Resp.* $y'=na^{\operatorname{tg} nx}\sec^2 nx\ln a$. 96. $y=e^{\cos x}\operatorname{sen} x$. *Resp.* $y'=e^{\cos x}(\cos x-\operatorname{sen}^2 x)$. 97. $y=e^x\ln\operatorname{sen} x$. *Resp.* $y'=e^x(\operatorname{cotg} x+\ln\operatorname{sen} x)$. 98. $y=x^n e^{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $y'=x^{n-1}e^{\operatorname{sen} x}(n+x\cos x)$. 99. $y=x^x$. *Resp.* $y'=x^x(\ln x+1)$. 100. $y=x^{\frac{1}{x}}$. *Resp.* $y'=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$. 101. $y=x^{\ln x}$. *Resp.* $y'=x^{\ln x-1}\ln x^2$. 102. $y=e^{x^x}$. *Resp.* $y'=e^{x^x}(1+\ln x)\,x^x$. 103. $y=(x/n)^{nx}$. *Resp.* $y'=n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)$. 104. $y=x^{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $x^{\operatorname{sen} x}\times\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}+\ln x\cos x\right)$. 105. $y=(\operatorname{sen} x)^x$. *Resp.* $(\operatorname{sen} x)^x(\ln\operatorname{sen} x+x\operatorname{cotg} x)$.
106. $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$. *Resp.* $y'=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}(1+\sec^2 x\ln\operatorname{sen} x)$. 107. $y=\operatorname{tg}\times\frac{1-e^x}{1+e^x}$. *Resp.* $y'=-\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\frac{1}{\cos^2\frac{1-e^x}{1+e^x}}$. 108. $y=\operatorname{sen}\sqrt{1-2^x}$. *Resp.* $y'=-\frac{\cos\sqrt{1-2x}}{2\sqrt{1-2^x}}\,2^x\ln 2$. 109. $y=10^{x\operatorname{tg} x}$. *Resp.* $y'=10^{x\operatorname{tg} x}\ln 10\times\left(\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$.

Calcular las derivadas de las funciones siguientes, hallando previamente sus logaritmos. **110.** $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right)$. **111.** $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. *Resp.* $y'=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\times\left(\frac{3}{x+1}+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}\right)$. **112.** $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. *Resp.* $y'=-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$. **113.** $y=\frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. *Resp.* $y'=\frac{-161x^2+480x-271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$. **114.** $y=\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $y'=\frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **115.** $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. *Resp.* $y'=5x^4(a+3x)^2\times(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$. **116.** $y=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **117.** $y=(\operatorname{arcsen} x)^2$. *Resp.* $y'=\frac{2\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$. **118.** $y=\operatorname{arctg}(x^2+1)$. *Resp.* $y'=\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$. **119.** $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{2}{1+x^2}$. **120.** $y=\arccos(x^2)$. *Resp.* $y'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **121.** $y=\frac{\arccos x}{x}$. *Resp.* $y'=\frac{-(x+\sqrt{1-x^2}\arccos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **122.** $y=\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **123.** $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\times\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$. *Resp.* $y'=2\sqrt{a^2-x^2}$. **124.** $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$. *Resp.* $y'=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. **125.** $u=\operatorname{arctg}\frac{v+a}{1-av}$. *Resp.* $\frac{du}{dv}=\frac{1}{1+v^2}$. **126.** $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$. **127.** $y=x\operatorname{arcsen} x$. *Resp.* $y'=\operatorname{arcsen} x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **128.** $f(x)=\arccos(\ln x)$. *Resp.* $f'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **129** $f(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x}}$. **130.** $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $(0\leqslant x<\pi)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{2}$. **131.** $y=e^{\operatorname{arctg} x}$. *Resp.* $y'=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$. **132.** $y=\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. *Resp.* $y'=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$. **133.** $y=x^{\operatorname{arcsen} x}$. *Resp.* $y'=x^{\operatorname{arcsen} x}\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **134.** $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. *Resp.* $y'=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}+1 \text{ en los cuadrantes } 1^{ro} \text{ y } 4^{o}\\ -1 \text{ en los cuadrantes } 2^{o} \text{ y } 3^{o}\end{cases}$. **135.** $y=\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{sen} x}{3+5\cos x}$. *Resp.* $y'=\frac{4}{5+3\cos x}$. **136.** $y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. *Resp.* $y'=$

$=\frac{2a^3}{x^4-a^4}$. 137. $y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. *Resp.* $y'=\frac{x^2}{1-x^4}$. 138. $y=-\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$. *Resp.* $y'=\frac{x^5+1}{x^6+x^4}$. 139. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. *Resp.* $y'=\frac{1}{x^3+1}$. 140. $y=\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. *Resp.* $y'=\frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$. 141. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. *Resp.* $-\frac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}$.

Derivación de las funciones implícitas

Hallar $\frac{dy}{dx}$ si:

142. $y^2=4px$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$. 143. $x^2+y^2=a^2$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. 144. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$. 145. $y^3-3y+2ax=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{3(1-y^2)}$. 146. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 147. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 148. $y^2-2xy+b^2=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$. 149. $x^3+y^3-3axy=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. 150. $y=\cos(x+y)$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$. 151. $\cos(xy)=x$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$.

Hallar $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas paramétricamente:

152. $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen}t$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{cotg}t$. 153. $x=a(t-\operatorname{sen}t)$; $y=a(1-\cos t)$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$. 154. $x=a\cos^3 t$; $y=b\operatorname{sen}^3 t$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$. 155. $x=\frac{3at}{1+t^2}$; $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}$. 156. $u=2\ln\operatorname{cotg}s$, $v=\operatorname{tg}s+\operatorname{cotg}s$. Demostrar que $\frac{du}{dv}=\operatorname{tg}2s$.

Hallar las tangentes de los ángulos de inclinación de las líneas tangentes a las curvas:

157. $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen}t$ en el punto $x=-\frac{1}{2}$, $y=\sqrt{3/2}$. Construir la gráfica. *Respuesta*: $1/\sqrt{3}$. 158. $x=2\cos t$, $y=\operatorname{sen}t$ en el punto $x=1$, $y=-\sqrt{3/2}$. Construir la gráfica. *Respuesta*: $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 159. $x=a(t-\operatorname{sen}t)$,

$y=a(1-\cos t)$ cuando $t=\pi/2$. Construir la gráfica. *Respuesta*: 1. **160.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\,\text{sen}^3 t$ cuando $t=\frac{\pi}{4}$; Construir la gráfica. *Respuesta*: -1.

161. Un cuerpo lanzado al espacio, formando con la horizontal un ángulo α, describe en el vacío, por acción de la gravedad, una curva (parábola), cuyas ecuaciones son: $x=v_0\cos\alpha t$, $y=v_0\,\text{sen}\,\alpha t-\frac{gt}{2}$ ($g=9{,}8$ m/seg²). Sabiendo que $\alpha=60^\circ$, $v_0=50$ m/seg, determinar la dirección del movimiento, cuando: 1) $t=2$ seg; 2) $t=7$ seg. Construir la gráfica. *Respuesta*: 1) $tg\,\varphi_1=0{,}948$, $\varphi_1=43^\circ30'$; 2) $\text{tg}\,\varphi_2=-1{,}012$, $\varphi_2=+134^\circ7'$.

Hallar las diferenciales de las funciones siguientes: **162.** $y=(a^2-x^2)^5$. *Respuesta*: $dy=-10x(a^2-x^2)^4\,dx$. **163.** $y=\sqrt{1+x^2}$. *Respuesta*: $dy=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **164.** $y=\frac{1}{3}\text{tg}^3 x+\text{tg}\,x$. *Respuesta*: $dy=\text{sc}^4 x dx$. **165.** $y=\frac{x\ln x}{1-x}+\ln(1-x)$. *Respuesta*: $dy=\frac{\ln x dx}{(1-x^2)}$.

Calcular los incrementos y diferenciales de las funciones:

166. $y=2x^2-x$, cuando $x=1$, $\Delta x=0{,}01$. *Respuesta*: $\Delta y=0{,}0302$, $dy=0{,}03$. **167.** Dada $y=x^3+2x$. Hallar Δy y dy, cuando $x=-1$, $\Delta x=0{,}02$. *Respuesta*: $\Delta y=0{,}098808$, $dy=0{,}1$. **168.** Dada $y=\text{sen}\,x$. Hallar dy, cuando $x=\pi/3$, $\Delta x=\pi/18$. *Respuesta*: $dy=\frac{\pi}{36}=0{,}00873$. **169.** Conociendo que $\text{sen}\,60^\circ=\sqrt{3/2}=0{,}866025$; $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, hallar los valores aproximados de $\text{sen}\,60^\circ3'$ y $\text{sen}\,60^\circ18'$. Comparar los resultados con datos tabulares. *Respuesta*: $\text{sen}\,60^\circ3'\approx 0{,}866461$; $\text{sen}\,60^\circ18'\approx 0{,}868643$. **170.** Hallar el valor aproximado de $\text{tg}\,45^\circ4'30''$. *Respuesta*: 1,00262. **171.** Conociendo que $\log_{10}200=2{,}30103$, hallar el valor aproximado de $\log_{10}200{,}2$. *Respuesta*: 2,30146.

Derivadas de diversas órdenes **172.** $y=3x^3-2x^2+5x-1$. Hallar y''. *Resp.* $18x-4$. **173.** $y=\sqrt[5]{x^3}$. Hallar y'''. *Resp.* $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. **174.** $y=x^6$. Hallar $y^{(6)}$. *Resp.* 6!. **175.** $y=\frac{C}{x^n}$. Hallar y''. *Resp.* $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. **176.** $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Hallar y''. *Resp.* $-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$. **177.** $y=2\sqrt{x}$. Hallar $y^{(4)}$. *Resp.* $-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$. **178.** $y=ax^2+bx+c$. Hallar y'''. *Resp.* 0. **179.** $f(x)=\ln(x+1)$. Hallar $f^{IV}(x)$. *Resp.* $-\frac{6}{(x+1)^4}$. **180.** $y=\text{tg}\,x$. Hallar y'''. *Resp.* $6\,\text{sc}^4 x-4\,\text{sc}^2 x$. **181.** $y=\ln\text{sen}\,x$. Hallar y'''. *Resp.* $2\cot g\,x\csc^2 x$. **182.** $f(x)=\sqrt{\text{sc}\,2x}$. Hallar $f''(x)$. *Resp.* $f''(x)=3[f(x)]^5-f(x)$. **183.** $y=\frac{x^3}{1-x}$. Hallar $f^{IV}(x)$. *Resp.* $\frac{4!}{(1-x)^5}$. **184.** $p=(q^2+a^2)\,\text{arctg}\,\frac{q}{a}$. Hallar $\frac{d^3p}{dq^3}$. *Resp.* $\frac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$. **185.** $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $\frac{y}{a^2}$. **186.** $y=\cos ax$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $a^n\cos(ax+n\pi/2)$. **187.** $y=a^x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $(\ln a)^n a^x$. **188.** $y=\ln(1+x)$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

189. $y=\frac{1-x}{1+x}$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. 190. $y=e^x x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $e^x(x+n)$. 191. $y=x^{n-1}\ln x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $\frac{(n-1)!}{x}$. 192. $y=\operatorname{sen}^2 x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $-2^{n-1}\cos(2x+\pi n/2)$. 193. $y=\operatorname{sen} x$. Hallar $y^{(n)}$. *Resp.* $x\operatorname{sen}(x+\pi n/2)-n\cos(x+\pi n/2)$. 194. Si $y=e^x\operatorname{sen} x$, demostrar que $y''-2y'+2y=0$. 195. $y^2=4ax$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{4a^2}{y^3}$. 196. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$. *Resp.* $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; $-\frac{3b^6x}{a^4y^5}$. 197. $x^2+y^2=r^2$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{r^2}{y^3}$. 198. $y^2-2xy=0$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$. *Resp.* 0. 199. $\rho=\operatorname{tg}(\varphi+\rho)$. Hallar $\frac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. Resp. $-\frac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$. 200. $\operatorname{sc}\varphi\cdot\cos\rho=C$. Hallar $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2\rho-\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\rho}$. 201. $e^x+x=e^y+y$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$. 202. $y^3+x^3-3axy=0$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. 203. $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Resp.* $-\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4 t/2}$. 204. $x=a\cos 2t$, $y=b\operatorname{sen}^2 t$. Demostrar que $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. 205. $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$. *Resp.* $-\frac{3\cos t}{a^2\operatorname{sen}^5 t}$. 206. Demostrar que $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{senh} x)=\operatorname{senh} x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{senh} x)=\cosh x$.

Ecuaciones de la tangente y de la normal. Longitudes de la subtangente y de la subnormal

207. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y=x^3-3x^2-x+5$ en el punto $M(3,2)$. *Respuesta*: tangente $8x-y-22=0$; normal $x+8y-19=0$.

208. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, las longitudes de la subtangente y subnormal de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ en el punto $M(x_1, y_1)$. *Respuesta*: tangente $xx_1+yy_1=r^2$; normal $x_1y-y_1x=0$; $s_T=\left|\frac{y_1^2}{x_1}\right|$; $s_N=|-x_1|$.

209. Demostrar que la subtangente correspondiente a un punto arbitrario de la parábola $y^2=4px$ queda dividida por el vértice en dos partes iguales y que la subnormal es constante e igual a $2p$. Construir la gráfica.

210. Hallar la ecuación de la tangente en el punto $M(x_1, y_1)$: a) A la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Respuesta*: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. b) A la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Respuesta*: $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$. 211. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva de Agnesi $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ en el punto donde $x=2a$. *Respuesta*: tangente $x+2y=4a$; normal $y=2x-3a$.

212. Demostrar que la normal a la curva $3y=6x-5x^3$ trazada en el punto $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$ pasa por el origen de las coordenadas.

213. Demostrar que la tangente a la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ en el punto $M(a, b)$ está dada por la ecuación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

214. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2=20x$ que forma con el eje Ox un ángulo de 45°. *Respuesta*: $y=x+5$ [en el punto (5, 10)].

215. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=52$, paralelas a la recta $2x+3y=6$. *Respuesta*: $2x+3y\pm 26=0$.

216. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $4x^2-9y^2=36$, perpendiculares a la recta $2y+5x=10$. *Respuesta*: no existen tales tangentes.

217. Demostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $xy=m$, comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por el punto de tangencia en dos partes iguales.

218. Demostrar que el segmento de la tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, comprendido entre los ejes de coordenadas, tiene longitud constante.

219. Hallar el ángulo α bajo el cual se cortan las curvas $y=a^x$ e $y=b^x$. *Respuesta*: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\ln a-\ln b}{1+\ln a\cdot\ln b}$.

220. Hallar las longitudes de la subtangente, subnormal, tangente y normal de la cicloide $x=a(\theta-\operatorname{sen}\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ en el punto en que $\theta=\frac{\pi}{2}$. *Respuesta*: $s_T=a$; $s_N=a$; $T=a\sqrt{2}$; $N=a\sqrt{2}$.

221. Hallar los valores s_T, s_N, T y N para la hipocicloide $x=4a\cos^3 t$, $y=4a\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta*: $s_T=-4a\operatorname{sen}^2 t\cos t$; $s_N=-4a\frac{\operatorname{sen}^4 t}{\cos t}$; $T=4a\operatorname{sen}^2 t$; $N=4a\operatorname{sen}^2 t\operatorname{tg} t$.

Problemas diversos

Calcular derivadas de las funciones: **222.** $y=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{\cos^3 x}$. **223.** $y=\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}$. *Resp.* $y'=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. **224.** $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. *Resp.* $y'=\frac{\cos x}{|\cos x|}$. **225.** $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0)$. *Resp.* $y'=\frac{1}{a+b\cos x}$. **226.** $y=|x|$. *Resp.* $y'=\frac{x}{|x|}$. **227.** $y=\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$. *Resp.* $y'=-\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

228. De las fórmulas para calcular el volumen y la superficie de la esfera $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ y $s=4\pi r^2$, se deduce que $\frac{dv}{dr}=s$. Explicar el significado geométrico de este resultado. Hallar la correlación análoga entre el área del círculo y la longitud de la circunferencia.

229. En el triángulo ABC el lado a se expresa a través de los otros dos lados b, c y el ángulo A, formado por estos últimos, mediante la fór-

mula $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$. Siendo invariables b y c, a es una función del ángulo A. Demostrar que $\frac{da}{dA}=h_a$, donde h_a es la altura del triángulo que corresponde a la base a. Interpretar el significado geométrico de este resultado.

230. Empleando el concepto de diferencial, interpretar el origen de las fórmulas aproximadas $\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}$, donde $|b|$ es un número pequeño, en comparación con a.

231. El período de oscilaciones de un péndulo es $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. ¿Qué influencia ejerce sobre el error, al calcular el valor del período T, un error del 1% cometido al medir:

1) la longitud del péndulo l; 2) la aceleración de la fuerza de gravedad g?

Respuesta: 1) $\approx\frac{1}{2}$ %; 2) $\approx\frac{1}{2}$ %.

232. La tractriz tiene la propiedad de que en cada uno de sus puntos, el segmento de la tangente T es de longitud constante. Demostrar esto,

1) dada la ecuación de la tractriz: $x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a}{2}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}}$ $(a>0)$;

2) dadas las ecuaciones paramétricas

$$x=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),\quad y=a\operatorname{sen}t.$$

233. Demostrar que la función $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ satisface la ecuación $y''+3y'+2y=0$ (C_1 y C_2 son constantes).

234. Suponiendo que $y=e^x\operatorname{sen}x$, $z=e^x\cos x$, demostrar que

$$y''=2z,\quad z''=-2y.$$

235. Demostrar que la función $y=\operatorname{sen}(m\arcsin x)$ satisface la ecuación $(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$.

236. Demostrar que, si $(a=bx)e^{\frac{y}{x}}=x$, se tiene:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2.$$

CAPITULO IV

TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1. TEOREMA SOBRE LAS RAICES DE LA DERIVADA (TEOREMA DE ROLLE)

Teorema de Rolle. *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores de éste, reduciéndose a cero en los extremos $x = a$ y $x = b$, $[f(a) = f(b) = 0]$, entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe por lo menos un punto, $x = c$, $a < c < b$, en el que la derivada $f'(x)$ se reduce a cero, es decir, $f'(c) = 0$**.

Demostración. Puesto que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, debe tener en éste su valor máximo M, y su valor mínimo m. Si $M = m$, la función $f(x)$ es constante, es decir, tiene una valor constante $f(x) = m$ para todos los valores de x. Pero, en este caso, en cualquier punto del segmento $f'(x) = 0$ y el teorema queda demostrado. Supongamos ahora que $M \neq m$. Entonces, por lo menos uno de estos números no es igual a cero.

Para concretar, supongamos que $M > 0$ y que la función toma su valor máximo cuando $x = c$, es decir, $f(c) = M$. Observemos que c es diferente de a y de b ya que, según la condición, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Si $f(c)$ es el valor máximo de la función, entonces $f(c + \Delta x) - f(c) \leqslant 0$, tanto para $\Delta x > 0$, como para $\Delta x < 0$.

De aquí se deduce que:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0; \qquad (1')$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0. \qquad (1'')$$

Ya que, según la hipótesis del teorema, existe la derivada en el punto $x = c$, entonces, pasando al límite, cuando $\Delta x \to 0$, obtene-

*) El número c se denomina *raíz de la función* $\varphi(x)$, si $\varphi(c) = 0$

mos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0, \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0.$$

Pero las correlaciones $f'(c) \leqslant 0$ y $f'(c) \geqslant 0$ son compatibles sólo para el caso en que $f'(c) = 0$. Por tanto, dentro del segmento $[a, b]$ hay un punto c, en el cual la derivada $f'(x)$ es cero.

El teorema sobre las raíces de la derivada tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Si una curva continua, con tangente

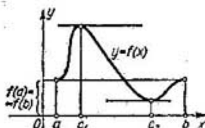


Fig. 91

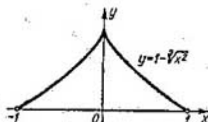


Fig. 92

en cada uno de sus puntos, corta el eje Ox en los puntos de abscisas a y b, entonces en esta curva existirá por lo menos un punto de abscisa c, $a < c < b$, en el cual la tangente es paralela al eje Ox.

Observación 1. El teorema demostrado es también válido para una función derivable que en los extremos del segmento $[a, b]$ no se reduzca a cero, sino tome valores iguales: $f(a) = f(b)$ (fig. 91). La demostración es análoga a la anterior.

Observación 2. Si la función $f(x)$ es tal que no tiene derivada en todos los puntos del segmento $[a, b]$, el teorema puede ser falso (es decir, que en este caso, en el segmento $[a, b]$ puede no existir un punto c en el que la derivada $f'(x)$ se reduzca a cero).

Por ejemplo, la función

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

(fig. 92) es continua en el segmento $[-1,1]$ y se reduce a cero en los extremos del mismo; sin embargo, la derivada

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

no se reduce a cero dentro del segmento. Esto se debe a que dentro del mismo hay un punto $x = 0$, en el cual no existe derivada (se reduce al infinito).

La gráfica de la figura 93 nos da un ejemplo más de una función, cuya derivada no se reduce a cero en el segmento $[0, 2]$.

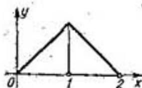


Fig. 93

Para esta función tampoco se cumplen las condiciones del teorema de Rolle, puesto que la función no tiene derivada en el punto $x = 1$.

§ 2. TEOREMA SOBRE LOS INCREMENTOS FINITOS (TEOREMA DE LAGRANGE)

Teorema de Lagrange. *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores del mismo, dentro del segmento $[a, b]$ existirá por lo menos un punto c, $a < c < b$ en que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1}$$

Demostración. Designemos por Q el número $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, es decir,

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{2}$$

y examinemos la función auxiliar $F(x)$, determinada por la igualdad

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \tag{3}$$

Veamos el significado geométrico de la función $F(x)$. Para ello escribamos primero la ecuación de la cuerda AB (fig. 94), teniendo en cuenta que su coeficiente angular es igual a $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y que la cuerda pasa por el punto $(a; f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x - a);$$

de donde,

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Pero $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Por tanto, para cada valor de x, $F(x)$ es igual a la diferencia entre las ordenadas de la curva, $y = f(x)$, y la cuerda $y = f(a) + Q(x - a)$, para los puntos de una misma abscisa x.

Es fácil ver que $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, derivable en su interior y se reduce a cero en los extremos, es decir,

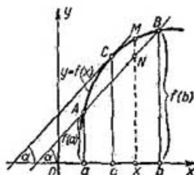


Fig. 94

$F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Por eso, a la función $F(x)$ se puede aplicar el teorema de Rolle, según el cual, dentro del segmento existe un punto $x = c$, de tal manera que

$$F'(c) = 0.$$

Pero

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Es decir,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

de donde

$$Q = f'(c).$$

Sustituyendo el valor de Q en la igualdad (2), tendremos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{1'}$$

de donde se deduce directamente la fórmula (1). Así, pues, el teorema queda demostrado.

Con el fin de aclarar el significado geométrico del teorema de Lagrange veamos la figura 94. En ésta, la magnitud $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ representa la tangente del ángulo α de inclinación de la cuerda que pasa por los puntos A y B de la gráfica y cuyas abscisas son a y b.

Por otra parte, $f'(c)$ es la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente a la curva en el punto de abscisa c. De modo que, el significado geométrico de la igualdad (1′), equivalente

a la igualdad (1), es el siguiente: si por cada punto del arco AB puede trazarse una tangente, existirá en este arco, entre A y B, un punto C tal que en éste la línea tangente sea paralela a la cuerda que une los puntos A y B.

Observemos, ahora, lo siguiente; puesto que el valor c satisface la condición $a < c < b$, entonces, $c - a < b - a$, o sea,

$$c - a = \theta\,(b - a),$$

donde θ es un número comprendido entre 0 y 1, es decir,

$$0 < \theta < 1.$$

Pero, en este caso,

$$c = a + \theta\,(b - a),$$

y la fórmula (1) puede tomar la forma que sigue:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'[a + \theta(b - a)],\quad 0 < \theta < 1. \qquad (1'')$$

§ 3. TEOREMA SOBRE LA RAZON DE LOS INCREMENTOS DE DOS FUNCIONES (TEOREMA DE CAUCHY)

Teorema de Cauchy. *Siendo $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ y derivables dentro del mismo, y si, además, $\varphi'(x)$ no se anula en el interior del segmento, entonces dentro de éste existirá un punto $x = c$, $a < c < b$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \qquad (1)$$

Demostración. Definamos el número Q por la igualdad

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \qquad (2)$$

Observemos que $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, ya que en el caso contrario $\varphi(b)$ sería igual a $\varphi(a)$, y, según el teorema de Rolle, la derivada $\varphi'(x)$ se reduciría a cero dentro del segmento, lo que contradice a la hipótesis del teorema.

Formemos una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q\,[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Es evidente, que $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$ (que se deduce de la definición de la función $F(x)$ y de la de Q). Teniendo en cuenta que la función $F(x)$ satisface en el segmento $[a, b]$ todas las condiciones del teorema de Rolle, deducimos que entre a y b existe un valor $x = c$ $(a < c < b)$ tal que $F'(c) = 0$. Pero, $F'(x) = f'(x) -$

$-Q\varphi'(x)$ y entonces

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

de donde:

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Sustituyendo el valor de Q en la igualdad (2), obtendremos la igualdad (1).

Observación. Contrariamente a lo que parece a primera vista, el teorema de Cauchy no se puede demostrar aplicando el teorema de Lagrange a los dos términos de la fracción

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

En efecto, en este caso obtendríamos (después de reducir la fracción por $b - a$) la fórmula:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

en la que $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Pero como, en el caso general, $c_1 \neq c_2$, el resultado obtenido, no confirma, evidentemente, el teorema de Cauchy.

§ 4. LIMITE DE LA RAZON DE DOS INFINITESIMALES

(«CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS DEL TIPO $\frac{0}{0}$»)

Supongamos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy en cierto segmento $[a, b]$ y se reducen a cero en el punto $x = a$ del mismo, es decir, $f(a) = 0$ y $\varphi(a) = 0$.

La razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ no está definida, cuando $x = a$, pero tiene, sin embargo, un significado bien determinado para los valores de $x \neq a$. Por tanto, se puede plantear el problema de hallar el límite de esta razón, cuando $x \to a$. El cálculo de los límites de esta índole se llama habitualmente «cálculo de límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$».

Nos hemos encontrado con problemas de este género cuando considerábamos, por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y cuando hallábamos las derivadas de las funciones elementales. La expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no tiene sentido, cuando $x = 0$, es decir, la función $F(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

no está definida, cuando $x = 0$, pero hemos visto que el límite de la expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, cuando $x \to 0$, existe y es igual a 1.

Teorema (Regla de L'Hospital). *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen en cierto segmento $[a, b]$ las condiciones del teorema de Cauchy y se reducen a cero en el punto $x = a$, es decir, $f(a) = \varphi(a) = 0$; entonces, si existe el límite de la razón $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, cuando $x \to a$, existirá también $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ y además:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Demostración. Tomemos en el segmento $[a, b]$ un punto $x \neq a$. Aplicando la fórmula de Cauchy, tendremos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

donde ξ se encuentra entre a y x. Según la condición, $f(a) = \varphi(a) = 0$. Esto significa que:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (1)$$

Si $x \to a$, también $\xi \to a$, ya que ξ está comprendida entre x y a. Al mismo tiempo, si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, entonces existirá también $\lim\limits_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ igual a A.

Está claro que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

y en definitiva:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Observación 1. El teorema es válido también en el caso en que las funciones $f(x)$ ó $\varphi(x)$ no están definidas en $x = a$, pero

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0.$$

Para reducir este caso al examinado anteriormente, es necesario

definir adicionalmente las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ en el punto $x = a$ de tal modo que éstas sean continuas en dicho punto.

Para esto es suficiente poner

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0; \qquad \varphi(a) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0,$$

ya que, evidentemente, el límite de la razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, cuando $x \to a$, no depende de que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ estén o no definidas en el punto $x = a$.

Observación 2. Si $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, según la hipótesis del teorema, entonces, aplicando la regla de L'Hospital para la razón $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, obtendremos la fórmula:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \quad \text{etc.}$$

Observación. 3. Si $\varphi'(a) = 0$, pero $f'(x) \neq 0$, el teorema se aplica a la razón inversa $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, que tiende a cero, cuando $x \to a$. Por tanto, la razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tiende al infinito.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

En este caso fue necesario aplicar tres veces la regla de L'Hospital, puesto que, para $x = 0$, las razones de las primeras, segundas y terceras derivadas conducen a la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Observación 4. La regla de L'Hospital también puede ser aplicada, cuando

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

En efecto, haciendo $x=\frac{1}{z}$, vemos que $z\to 0$, cuando $x\to\infty$, y, por tanto:

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=0, \qquad \lim_{z\to 0}\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=0.$$

Aplicando la misma regla de L'Hospital a la razón $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ hallamos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{k\cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}k\cos\frac{k}{x}=k.$$

§ 5. LIMITE DE LA RAZON DE DOS MAGNITUDES INFINITAMENTE GRANDES

(«CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$»)

Examinemos el problema acerca del límite de la razón de las dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, que tienden al infinito, cuando $x\to a$ (o cuando $x\to\infty$).

Teorema. *Supongamos que $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones continuas y derivables, para todos los valores de $x\neq a$ en la vecindad del punto a, y que la derivada $\varphi'(x)$ no se reduce a cero. Supongamos también que:*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$$

y que existe el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \tag{1}$$

Entonces existirá también el $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *o sea:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

Demostración. En la vecindad considerada del punto a elijamos dos puntos α y x de tal modo que

$$\alpha < x < a \quad (\text{ó } a > x > \alpha).$$

Según el teorema de Cauchy, tendremos:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{3}$$

donde $\alpha < c < x$. El primer miembro de la igualdad (3) lo transformaremos así:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \tag{4}$$

De las correlaciones (3) y (4) obtenemos:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}.$$

De donde:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}. \tag{5}$$

De la condición (1) se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede elegir α tan próximo de a, que para todos los valores de $x = c$, donde $\alpha < c < a$, se cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \tag{6}$$

Examinemos, ahora, la fracción

$$\frac{1 - \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

Fijemos α de tal manera que se cumpla la desigualdad (6), y aproximemos x al valor a. Ya que $f(x) \to \infty$ y $\varphi(x) \to \infty$, cuando $x \to a$, tendremos:

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$$

y, por consiguiente, para el valor de $\varepsilon > 0$, prefijado anteriormente, para x, suficientemente próximo de a, tendremos:

$$\left| \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \right| < \varepsilon$$

ó

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon. \tag{7}$$

Multiplicando miembro a miembro las desigualdades (6) y (7), obtenemos:

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

o, en virtud de la igualdad (5):

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Puesto que ε es un número arbitrariamente pequeño, cuando x se encuentra lo suficientemente próximo de a, de las últimas desigualdades se deduce:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A,$$

o, según (1):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

lo que se trataba de demostrar.

Observación 1. Si en (1), $A=\infty$, es decir,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty,$$

la igualdad (2) sigue siendo válida. En efecto, de la expresión anterior se tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0.$$

Según el teorema demostrado:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0,$$

de donde,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

Observación 2. El teorema se puede generalizar fácilmente al caso en que $x\to\infty$.

En el caso de que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{8}$$

Esto se demuestra haciendo la sustitución de $x = \frac{1}{z}$, como se hizo en condiciones análogas, al calcular los límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ (véase § 4, observación 4).

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Observación 3. Insistamos una vez más en que las fórmulas (2) y (8) se verifican sólo cuando exista el límite (finito o infinito) del segundo miembro. Puede ocurrir que exista el límite del primer miembro y el del segundo no, como ocurre en el caso siguiente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x}.$$

Este límite existe y es igual a 1. En efecto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1.$$

Pero la razón de las derivadas

$$\frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

no tiende a ningún límite, cuando $x \to \infty$, sino que oscila entre 0 y 2.

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \operatorname{sen} 3x}{2 \cos x \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3 \frac{(-1)}{(1)} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3.$$

Ejemplo 4.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

En general, para cualquier número entero $n>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots 1}{e^x}=0.$$

Los cálculos de los límites indeterminados, que simbólicamente se representan así:

$$\text{a) } 0\cdot\infty;\quad \text{b) } 0^0;\quad \text{c) } \infty^0;\quad \text{d) } 1^\infty;\quad \text{e) } \infty-\infty,$$

se reducen a los casos ya examinados.

El significado de estos límites indeterminados es como sigue:

a) Suponiendo $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, hallar

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)].$$

Esta es una indeterminación de tipo $0\cdot\infty$.

Escribiendo esta expresión en la forma:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

o en la forma:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

obtendremos, para $x\to a$, una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 5.

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{n}{x^{n+1}}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n}=0.$$

b) Sea:

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0,$$

hallar

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)},$$

o, como suele decirse, calcular el límite indeterminado de tipo 0^0.

Poniendo

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)},$$

y tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad, tendremos

$$\ln y=\varphi(x)\,[\ln f(x)].$$

Si $x \to a$, obtenemos en el segundo miembro una indeterminación de tipo $0 \cdot \infty$. Una vez calculado el $\lim_{x\to a} \ln y$, será fácil hallar el $\lim_{x\to a} y$. Efectivamente, en virtud de la continuidad de la función logarítmica, se tiene $\lim_{x\to a} \ln y = \ln \lim_{x\to a} y$, y si $\ln \lim_{x\to a} y = b$, resultará, evidentemente, que $\lim_{x\to a} y = e^b$. Si, como caso particular, $b = +\infty$ ó $b = -\infty$, entonces será, respectivamente, $\lim y = +\infty$ ó $\lim y = 0$.

Ejemplo 6. Hallar $\lim_{x\to 0} x^x$. Haciendo $y = x^x$, hallamos $\ln \lim y = \lim \ln y = \lim \ln (x^x) = \lim (x \ln x)$;

$$\lim_{x\to 0} (x \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0,$$

por tanto, $\ln \lim y = 0$, de donde resulta que $\lim y = e^0 = 1$, es decir,

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1.$$

De un modo análogo se calculan los límites en los demás casos.

§ 6. FORMULA DE TAYLOR

Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene todas las derivadas, hasta la de orden $(n+1)$ inclusive, en cierto segmento que contiene el punto $x = a$. Hallemos un polinomio $y = P_n(x)$ de grado no superior a n, cuyo valor en el punto $x = a$ sea igual al de la función $f(x)$ en el mismo punto, y los valores de sus derivadas hasta el n — ésimo orden sean iguales en el punto $x = a$ a los valores de las derivadas correspondientes de la función $f(x)$, en este punto:

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad P''_n(a) = f''(a), \ \ldots \\ \ldots, \ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \qquad (1)$$

Es de suponer que este polinomio, en cierto aspecto, será «proximo» a la función $f(x)$.

Hallaremos este en forma de polinomio, siguiendo las potencias de $(x-a)$ con coeficientes indeterminados

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots \\ \ldots + C_n(x-a)^n. \qquad (2)$$

Los coeficientes indeterminados $C_1, C_2, \ldots, C_n$ calculemos de tal modo que se cumplan las condiciones (1).

Hallemos previamente las derivadas de $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P''_n(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad n(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Sustituyendo x por el valor de a en los dos miembros de las igualdades (2) y (3) y sustituyendo, según (1), $P_n(a)$ por $f(a)$, $P'_n(a) = f'(a)$ etc., obtendremos:

$$\begin{aligned} f(a) &= C_0, \\ f'(a) &= C_1, \\ f''(a) &= 2\cdot 1C_2, \\ f'''(a) &= 3\cdot 2\cdot 1C_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(a) &= n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2\cdot 1C_n, \end{aligned}$$

de donde resulta:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = f(a), \qquad C_1 = f'(a), \qquad C_2 = \dfrac{1}{1\cdot 2} f''(a), \\ C_3 = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a),\ \ldots,\ C_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Introduciendo en la fórmula (2) los valores hallados de $C_1, C_2, \ldots, C_n$, obtenemos el polinomio buscado:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} f^{(n)}(a). \qquad (5)$$

Designemos por $R_n(x)$ la diferencia entre los valores de la función dada, $f(x)$, y del polinomio calculado $P_n(x)$ (fig. 95):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

de donde tenemos:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

o, en forma desarrollada:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x). \qquad (6)$$

El término $R_n(x)$ se conoce con el nombre de *término complementario*. Para aquellos valores de x en el que el término complementario $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

Así, pues, la fórmula (6) permite sustituir la función $y=f(x)$ por el polinomio $y=P_n(x)$ con el grado correspondiente de precisión, igual al valor del término complementario $R_n(x)$.

Estimemos el valor del $R_n(x)$ para diferentes valores de x.

Escribamos el término complementario en la forma

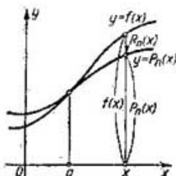


Fig. 95

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x), \qquad (7)$$

donde $Q(x)$ es la función que debemos hallar. Escribamos de nuevo la fórmula (6), del siguiente modo:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \qquad (6')$$

Considerando fijos los valores de x y a, la función $Q(x)$ tendrá un valor determinado, que designamos por Q.

Veamos ahora la función auxiliar de t (t está comprendido entre a y x):

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\ \dots$$

$$\dots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

donde el valor de Q viene determinado por la correlación (6'), cuando a y x son números determinados.

Hallemos la derivada $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) -$$

$$- \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) -$$

$$- \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q,$$

y reduciendo:

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \tag{8}$$

Por consiguiente, la función $F(t)$ tiene derivada en todos los puntos t, próximos al punto de abscisa a. Observemos que, según la fórmula (6′), se tiene:

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Por eso, a la función $F(t)$ se le puede aplicar el teorema de Rolle y, por tanto, existe un valor $t = \xi$, comprendido entre a y x, para el cual $F'(\xi) = 0$. De aquí, en virtud de la correlación (8), obtenemos:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0,$$

de donde

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Introduciendo esta expresión en la fórmula (7), resulta:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Esta es la llamada *fórmula de Lagrange* para el término complementario.

Como ξ está comprendido entre x y a, puede ser representado en la forma*:

$$\xi = a + \theta(x-a),$$

---

*) Véase el final del § 2 del presente capítulo.

donde, θ es un número comprendido entre 0 y 1, es decir, $0 < \theta < 1$. En este caso la fórmula del término complementario toma la forma:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

La fórmula:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad (9)$$

se denomina *fórmula de Taylor* para la función $f(x)$.

Haciendo $a = 0$, la fórmula de Taylor se escribirá así:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \qquad (10)$$

donde, θ está comprendido entre 0 *y* 1. En este caso particular, la fórmula de Taylor toma también el nombre de fórmula de Maclaurin.

§ 7. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES e^x, sen x y cos x POR LA FORMULA DE TAYLOR

1. Desarrollo de la función $f(x) = e^x$.

Hallando las derivadas sucesivas de $f(x)$, obtendremos:

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (10) § 6, tendremos:

$$e = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si $|x| \leqslant 1$, haciendo $n = 8$, habremos evaluado el término complementario:

$$R_8 < \frac{1}{9!} 3.$$

Cuando $x = 1$, se obtiene la fórmula que permite hallar el valor aproximado del número e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!};$$

realizando las operaciones sobre las fracciones decimales hasta el quinto signo después de la coma hallamos:

$$e = 2{,}71827.$$

Aquí se toman como exactas las primeras cuatro cifras decimales, ya que el error no es superior a $\frac{3}{9!}$ ó a 0,00001. Tengamos en cuenta que para cualquiera x el término complementario será

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Efectivamente, si $\theta < 1$, y x tiene un valor fijo, la magnitud $e^{\theta x}$ está acotada (es menor que e^x, cuando $x > 0$, y menor que 1, cuando $x < 0$).

Demostremos que, para todo x fijo, se verifica:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

En efecto,

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|.$$

Si x es un número fijo, se hallará un entero positivo N tal que $|x| < N$.

Ponemos $\frac{|x|}{N} = q$. Entonces, teniendo en cuenta que $0 < q < 1$, siendo $n = N+1, N+2, N+3$, etc., podemos escribir:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{1} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \frac{x}{N-1} \right| \cdot \left| \frac{x}{N} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \frac{x}{n} \right| \cdot \left| \frac{x}{n+1} \right| <$$

$$< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2},$$

puesto que

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q; \quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < q; \quad \ldots; \quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < q.$$

Pero la magnitud $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ es constante, es decir, no depende de n, mientras que q^{n-N+2} tiende a cero, cuando $n \to \infty$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{1}$$

y entonces,

$$R_n(x) = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

De lo anterior se deduce que para todo valor de x se puede calcular e^x con cualquier grado de precisión, tomando el número suficiente de términos.

2. Desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Hallemos las derivadas sucesivas de $f(x) = \operatorname{sen} x$:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0) = -1,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \operatorname{sen}\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \qquad f^{(n+1)}(\xi) = \operatorname{sen}\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Introduciendo las expresiones halladas en la fórmula (10) § 6, obtenemos el desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ según la fórmula

de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^n}{n!} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sen}\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

y puesto que $\left|\operatorname{sen}\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leqslant 1$, se tendrá $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x.

Apliquemos la fórmula obtenida para el cálculo aproximado de

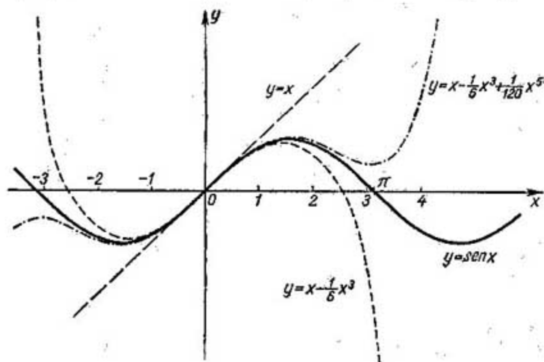


Fig. 96

sen 20°. Hagamos $n = 3$, es decir, nos limitaremos a los dos primeros términos del desarrollo:

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \operatorname{sen}\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}343.$$

Evaluemos el error que resulta igual al término complementario:

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \operatorname{sen}(\xi + 2\pi)\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

Por tanto, el error es inferior a 0,001, es decir, sen 20° = 0,343, con un error menor de 0,001.

En la figura 96 están representadas las gráficas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y de las tres primeras aproximaciones:

$$S_1(x) = x; \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

3. Desarrollo de la función $f(x) = \cos x$.
Hallando los valores de las derivadas sucesivas de la función $f(x) = \cos x$ para $x = 0$ e introduciéndolos en la fórmula de Maclaurin, obtendremos el desarrollo:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$\dots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$
$$|\xi| < |x|.$$

Aquí también $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x.

Ejercicios para el capítulo IV

Comprobar que el teorema de Rolle es válido para las funciones: **1.** $y = x^2 - 3x + 2$ en el segmento $[1, 2]$. **2.** $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ en el segmento $[0, 1]$. **3.** $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ en el segmento $[1, 3]$. **4.** $y = \operatorname{sen}^2 x$ en el segmento $[0, \pi]$. **5.** La función $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ tiene por raíces 1 y -1. Hallar la raíz de la derivada $f'(x)$, estudiada en el teorema de Rolle. **6.** Comprobar que entre las raíces de la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ se halla la de su derivada. **7.** Comprobar que el teorema de Rolle es válido para la función $y = \cos^2 x$ en el segmento $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$. **8.** La función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del segmento $[-1, 1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se reduce a cero en ningún punto del segmento $[-1, 1]$. Explicar por qué razón no es aplicable en este caso el teorema de Rolle. **9.** Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = \operatorname{sen} x$ en el segmento $[x_1, x_2]$. *Respuesta*: $\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1 = (x_2 - x_1)\cos c$, $x_1 < c < x_2$. **10.** Comprobar que la fórmula de Lagrange es válida para la función $y = 2x - x^2$ en el segmento $[0, 1]$. **11.** ¿En qué punto de la curva $y = x^n$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $M_1(0, 0)$ y $M_2(a, a^n)$? *Respuesta*: en el punto de abscisa $c = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$. **12.** ¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $M_1(1, 0)$ y $M_2(e, 1)$? *Respuesta*: en el punto de abscisa $c = e - 1$.

Aplicando el teorema de Lagrange, demostrar las desigualdades: **13.** $e^x \geqslant 1 + x$. **14.** $\ln(1 + x) < x$ $(x > 0)$. **15.** $b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$ para $b > a$. **16.** $\operatorname{arctg} x < x$. **17.** Aplicar la fórmula de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$ y hallar c. *Respuesta*: $c = \frac{14}{9}$.

Calcular los límites siguientes: 18. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. *Resp.* $\frac{1}{n}$. 19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$. *Resp.* 2. 20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$. *Resp.* 2. 21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$. *Resp.* -2. 22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$. *Resp.* No existe el límite. ($\sqrt{2}$ para $x \to +0$, $-\sqrt{2}$ para $x \to -0$). 23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^2}$. *Resp.* $-\frac{1}{8}$. 24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$. *Resp.* $\ln \frac{a}{b}$. 25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{6}$. 26. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$. *Resp.* $\cos a$. 27. $\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y + \operatorname{sen} y - 1}{\ln(1+y)}$. *Resp.* 2. 28. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{3x^2+x^5}$. *Resp.* $\frac{1}{3}$. 29. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-1}{2x+5}$. *Resp.* $\frac{3}{2}$. 30. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ (donde $n>0$). *Resp.* 0. 31. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccotg} x}$. *Resp.* 1. 32. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\ln \frac{x-1}{x}}$. *Resp.* -1. 33. $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{ay}}$. *Resp.* 0, cuando $a>0$; ∞, cuando $a \leqslant 0$. 34. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. *Resp.* 1. 35. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} 3x}{\ln \operatorname{sen} x}$. *Resp.* 1. 36. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$. *Resp.* 1. 37. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$. *Resp.* 0. 38. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. *Resp.* $\frac{2}{\pi}$. 39. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right]$. *Resp.* $-\frac{1}{2}$. 40. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right]$. *Resp.* -1. 41. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\sec\varphi - \operatorname{tg}\varphi)$. *Resp.* 0. 42. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$. *Resp.* $\frac{1}{2}$. 43. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} 2x$. *Resp.* $\frac{1}{2}$. 44. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$. *Resp.* ∞. 45. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. *Resp.* $\frac{1}{e}$. 46. $\lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[t]{t^2}$. *Resp.* 1. 47. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. *Resp.* 1. 48. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$. *Resp.* e^a. 49. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. *Resp.* $\frac{1}{e}$. 50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. *Resp.* 1. 51. $\lim\limits_{\varphi\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. 52. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. *Resp.* $\frac{1}{e}$. 53. Desarrollar en potencias

de $x-2$ el polinomio $x^4-5x^3+5x^2+x+2$. *Respuesta*: $2-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$. **54.** Desarrollar en potencias de $x+1$ el polinomio $x^5+2x^4-x^2+x+1$. *Respuesta*: $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$. **55.** Aplicar la fórmula de Taylor a la función $y=\sqrt{x}$, cuando $a=1$, $n=3$. *Respuesta*: $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{5}{16}\times$ $\times[1+\theta(x-1)]^{-7/2}$, $0<\theta<1$. **56.** Aplicar la fórmula de Maclaurin a la función $y=\sqrt{1+x}$, cuando $n=2$. *Respuesta*: $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+$ $+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}$, $0<\theta<1$. **57.** Tomando los resultados del ejemplo anterior, evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, cuando $x=0{,}2$. *Respuesta*: menos de $\frac{1}{2\cdot 10^3}$.

Explicar la procedencia de las igualdades aproximadas, válidas para pequeños valores de x, y evaluar el error de las mismas: **58.** $\ln\cos x\approx$ $\approx-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$. **59.** $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$. **60.** $\operatorname{arcsen} x\approx x+\frac{x^3}{6}$. **61.** $\operatorname{arctg} x\approx$ $\approx x-\frac{x^3}{3}$. **62.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}\approx 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. **63.** $\ln(x+\sqrt{1-x^2})\approx x-\frac{x^3}{3!}$.

Aplicando la fórmula de Taylor, calcular los límites de las expresiones: **64.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$. *Resp.* 1. **65.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-\operatorname{sen}^2 x}{1-e^{-x^2}}$. *Resp.* 0. **66.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)-x^3}{x^5}$. *Resp.* 1. **67.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. *Resp.* $\frac{1}{2}$. **68.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{cotg} x}{x}\right)$. *Resp.* $\frac{1}{3}$. **69.** $\lim\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right)$. *Resp.* $\frac{2}{3}$.

CAPITULO V

ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

§ 1. GENERALIDADES

El estudio del aspecto cuantitativo de los diferentes fenómenos de la naturaleza se reduce al establecimiento y análisis de la dependencia funcional entre las magnitudes variables que participan en cada fenómeno. Si se logra expresar tal dependencia funcional de modo analítico, es decir, mediante una o varias fórmulas, podemos explorar la dependencia mencionada, sirviéndonos de los métodos del análisis matemático. Por ejemplo, al estudiar el fenómeno del movimiento de un proyectil en el vacío se obtiene la fórmula que determina el alcance de caída R en función del ángulo de elevación α y la velocidad inicial v_0:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

(donde g es la aceleración de la gravedad).

Con esta fórmula, podemos establecer a qué ángulo α, corresponde el alcance R, máximo o mínimo, en qué condiciones el crecimiento del ángulo α determina el aumento del alcance, etc.

Consideremos otro ejemplo. Como resultado del estudio de las oscilaciones de una carga sobre una ballesta (de un vagón, de un automóvil, etc.) se obtiene la fórmula de la desviación y de la carga, respecto a la posición de equilibrio, en función de tiempo t:

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t).$$

Las magnitudes k, A, B, ω, que integran la fórmula, tienen un valor determinado para un sistema oscilatorio dado (dependen de la elasticidad de la ballesta, de la carga aplicada, etc., que no varían con el tiempo t) y, por eso, se consideran como constantes.

Con esta fórmula, se puede establecer para qué valores de t crece la desviación y al aumentar t, cómo varía la magnitud de la desviación máxima en función del tiempo, para qué valores de t estas desvia-

ciones son máximas, a qué valores de t corresponden las velocidades máximas del movimiento de la carga, etc.

Todos los problemas mencionados forman parte del concepto «análisis de la variación de una función».Es evidente que será difícil aclarar todas las cuestiones consideradas, calculando los valores de la función en puntos aislados (como se ha hecho en el capítulo II). La finalidad del presente capítulo consiste en establecer un método general para el análisis de la variación de funciones.

§ 2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION

En el § 6 del capítulo primero hemos dado la definición de una función creciente y decreciente. Apliquemos ahora el concepto de derivada al análisis del crecimiento y decrecimiento de una función.

Teorema. 1) *Si la función $f(x)$, derivable en el segmento $[a, b]$, crece en este segmento, su derivada en éste no es negativa, es decir,* $f'(x) \geqslant 0$.

2) *Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable sobre el intervalo (a, b) cuando $f'(x)$ es positiva para $a < x < b$, esta función es creciente sobre el segmento $[a, b]$.*

Demostración. Demostremos la primera parte del teorema. Supongamos que $f(x)$ crece sobre el segmento $[a, b]$; demos al argumento x un incremento Δx y consideremos la razón

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Como $f(x)$ es una función creciente, se tiene:

$$f(x+\Delta x) > f(x) \quad \text{para} \quad \Delta x > 0$$

y

$$f(x+\Delta x) < f(x) \quad \text{para} \quad \Delta x < 0.$$

En ambos casos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \tag{2}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

es decir, $f'(x) \geqslant 0$, lo que se trataba de demostrar. [Si fuera $f'(x) < 0$, entonces, para valores de Δx suficientemente pequeños, la razón (1) sería negativa, lo que contradice a la relación (2)].

Pasemos ahora a la segunda parte del teorema. Sea $f'(x) > 0$ para todos los valores de x pertenecientes al intervalo (a, b).

Consideremos dos valores arbitrarios, x_1 y x_2, $x_1 < x_2$, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

Conforme al teorema de Lagrange sobre incrementos finitos tenemos:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Puesto que $f'(\xi) > 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) > 0$, lo que significa que $f(x)$ es una función creciente. Existe un teorema análogo para las funciones decrecientes (si son derivables).

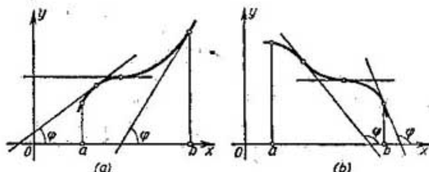


Fig. 97

Si la función $f(x)$ decrece sobre el segmento $[a, b]$, sobre el mismo segmento la derivada $f'(x) \leqslant 0$. Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo (a, b), la función $f(x)$ decrece en el segmento $[a, b]$. Se supone que la función es también continua en cada punto del segmento $[a, b]$ y derivable en todo el intervalo (a, b).

Observación. El teorema demostrado tiene la siguiente interpretación geométrica. Si la función $f(x)$ es creciente sobre el segmento $[a, b]$, la línea tangente a la curva $y = f(x)$, en cada punto del mismo, forma con el eje Ox un ángulo agudo φ, o en algunos puntos, puede ser paralela al eje. La tangente de este ángulo no es negativa: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geqslant 0$ (fig. 97, *a*).

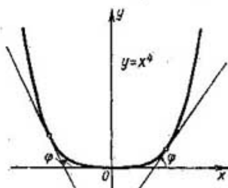


Fig. 98

Si la función $f(x)$ es decreciente sobre el segmento $[a, b]$ el ángulo de inclinación de la línea tangente será obtuso (en algunos puntos la línea tangente puede ser paralela al eje Ox). La tangente del ángulo no es positiva (fig. 97,*b*).

Del mismo modo se interpreta la segunda parte del teorema. El teorema permite juzgar sobre el crecimiento o decrecimiento de la función por el signo de su derivada.

Ejemplo: Determínense los dominios de crecimento y decrecimiento de la función

$$y = x^4.$$

Solución. La derivada es $y' = 4x^3$; $y' > 0$, es positiva para $x > 0$; es decir, la función crece;

$y' < 0$ es negativa, para $x < 0$, es decir, la función decrece (fig. 98).

§ 3. MAXIMO Y MINIMO DE LAS FUNCIONES

Definición de máximo. Se dice que la función $f(x)$ tiene un *máximo* en el punto x_1, si su valor es aquí mayor que en cualquier otro punto x de cierto intervalo que comprende el punto x_1. Es decir, la función tiene un *máximo* en $x = x_1$, si $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ para todo valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto*.

Así, por ejemplo, la función $y = f(x)$, cuya gráfica se expone en la figura 99, tiene máximo cuando $x = x_1$.

Definición de mínimo. Se dice que la función $f(x)$ tiene un *mínimo* para $x = x_2$ si

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$

para cualquier valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto (fig. 99).

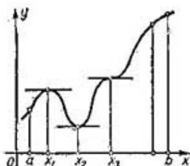


Fig. 99

Por ejemplo, la función $y = x^4$, examinada al final del párrafo anterior (véase fig. 98) tiene un mínimo en $x = 0$, ya que $y = 0$ cuando $x = 0$ e $y > 0$ para otros valores de x.

En relación con estas definiciones de máximo y de mínimo es necesario prestar atención a lo siguiente:

1. La función definida en un segmento puede alcanzar su valor máximo o mínimo sólo en los puntos comprendidos **dentro** del segmento considerado.

2. Sería un error suponer que el máximo y el mínimo de una función son respectivamente el mayor y menor valor de la misma en este segmento. En el punto del máximo, la función tiene el mayor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en los puntos **suficientemente próximos** al punto del máximo. En el punto del mínimo, la función tiene el menor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en los puntos **suficientemente próximos** al punto del mínimo.

---

*) A veces, esta definición se enuncia así: la función $f(x)$ tiene un *máximo* en el punto x_1, si existe una vecindad (α, β) del punto x_1 $(\alpha < x_1 < \beta)$ tal que para todos los puntos de la misma distintos de x_1, se cumpla la desigualdad $f(x) < f(x_1)$.

En la fig. 100 se representa una función definida en el segmento $[a, b]$, que tiene:

$$\text{máximo, cuando } x = x_1 \text{ y } x = x_3,$$

$$\text{mínimo, cuando } x = x_2 \text{ y } x = x_4,$$

pero el mínimo de la función en $x = x_4$ es mayor que el máximo en $x = x_1$. Para $x = b$, el valor de la función es mayor que cualquier máximo de la función en el segmento considerado.

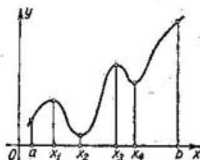


Fig. 100

Los máximos y los mínimos se llaman *valores extremos* de la función.

Los valores extremos de la función y su situación en el segmento $[a, b]$ caracterizan en cierto modo la variación de la función en dependencia de la variación del argumento.

Más adelante indicaremos el modo de calcular los valores extremos.

Teorema 1. (Condición necesaria para la existencia de un valor extremo). *Si la función derivable $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto $x = x_1$, su derivada en este punto se reduce a cero, es decir,* $f'(x_1) = 0$.

Demostración. Supongamos que en el punto $x = x_1$ la función tiene un máximo. Entonces, para los incrementos Δx $(\Delta x \neq 0)$, suficientemente pequeños en valor absoluto, se verificará:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

es decir,

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Pero en este caso, el signo de la razón,

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

se determina por el de Δx:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0.$$

Conforme a la definición de derivada, se tiene:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Si la función $f(x)$ tiene derivada en $x = x_1$, el límite del segundo miembro no depende de como Δx tiende a cero (permaneciendo positivo o negativo).

Pero, si $\Delta x \to 0$, siendo negativo, resulta:

$$f'(x_1) \geqslant 0.$$

Si $\Delta x \to 0$, siendo positivo, se tiene:

$$f'(x_1) \leqslant 0.$$

Puesto que $f'(x_1)$ es un número determinado que no depende de la manera en que Δx tiende a cero, las dos últimas desigualdades serán compatibles únicamente cuando

$$f'(x_1) = 0.$$

Del mismo modo se demuestra el teorema, cuando se trata del mínimo de la función.

Este teorema tieneel siguiente significado geométrico: si en los puntos de máximo o de mínimo la función $f(x)$ tiene derivada, la tangente a la curva $y = f(x)$ en estos puntos será paralela al eje Ox. Efectivamente, si $f'(x_1) = \text{tg}\, \varphi = 0$, donde φ es el ángulo formado por la tangente y el eje Ox, se tiene que $\varphi = 0$ (fig. 99).

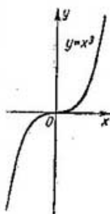


Fig. 101

De este teorema se deduce, que *si la función $f(x)$ tiene derivada para todos los valores considerados del argumento x, ésta puede tener valores extremos (máximo o mínimo) únicamente en los puntos en los que la derivada se reduce a cero.* La conclusión recíproca no es cierta: *una función puede no tener máximo ni mínimo en el punto en que la derivada se anula.* En la figura 99 se representa una función cuya derivada se reduce a cero cuando $x = x_3$ (la tangente es horizontal); sin embargo, la función no tiene en este punto máximo ni mínimo. Análogamente, la función $y = x^3$ (fig. 101) tiene derivada igual a cero en $x = 0$:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0.$$

Pero en este punto la función no tiene máximo ni mínimo. En efecto, por muy cerca que se encuentre el punto x del punto 0, siempre se verificará

$$x^3 < 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

y

$$x^3 > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Hemos analizado el caso en que la función tiene derivada en todos los puntos del segmento. ¿Y qué ocurre en los puntos donde no existe la derivada? En los ejemplos que siguen explicaremos que en los puntos donde la función no tiene derivada puede haber máximo o mínimo, pero puede ocurrir también que en éstos no haya ni uno ni otro.

Ejemplo 1. La función $y = |x|$ no tiene derivada en el punto $x = 0$ (en este punto la curva no tiene tangente determinada), pero en este punto

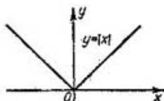


Fig. 102

la función dada admite un mínimo; en efecto, $y = 0$ cuando $x = 0$, mientras que para cualquier otro punto x, distinto de cero, tenemos $y > 0$ (fig. 102).

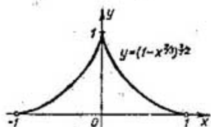


Fig. 103

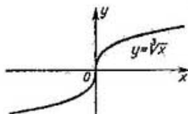


Fig. 104

Ejemplo 2. La función $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ no tiene derivada cuando $x = 0$, ya que la expresión $y' = -(1 - x^{2/3})^{1/2} x^{-1/3}$ es igual al infinito cuando $x = 0$, no obstante, en este punto la función tiene máximo: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ para x diferente de cero (fig. 103).

Ejemplo 3. La función $y = \sqrt[3]{x}$ no tiene derivada en $x = 0$ ($y' \to \infty$ cuando $x \to 0$). En este punto la función no tiene ni máximo ni mínimo puesto que $f(0) = 0$; $f(x) < 0$ para $x < 0$; y $f(x) > 0$ para $x > 0$ (fig. 104).

Así pues, la función puede tener valores extremos solamente en los puntos donde la derivada existe y es igual a cero, o bien en aquellos donde no existe la derivada.

Observemos que si la derivada no existe en cierto punto, pero existe en los cercanos a éste, entonces la derivada tiene discontinuidad en dicho punto.

Los valores del argumento, en los que la derivada se reduce a cero o tiene discontinuidad, se llaman *valores* o *puntos críticos*.

De lo anterior se deduce que no para todo valor crítico la función tiene máximo o mínimo. Sin embargo, si en un punto la función admite un máximo o mínimo, este punto es obligatoriamente crítico. Por eso, para hallar los valores extremos de la función, se procede de la manera siguiente: hallamos todos los puntos críticos y después estudiamos cada uno de ellos aclarando, si hay o no en éstos un máximo o mínimo de la función.

El análisis de la función en los puntos críticos está basado en los teoremas siguientes.

Teorema 2. (Condiciones suficientes para la existencia de un valor extremo). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua sobre cierto intervalo, al cual pertenece el punto crítico x_1, y es derivable en cada punto del mismo (excepto, posiblemente, el mismo punto x_1). Si, al pasar por este punto de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de «más» a «menos», entonces la función admite máximo en $x = x_1$. Si, al pasar por el punto x_1, de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de «menos» a «más», la función admite un mínimo en este punto.*

De modo que si:

a) $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{para } x > x_1, \end{cases}$

en el punto x_1 la función tiene *máximo*;

b) $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para } x < x_1 \\ f'(x) > 0 & \text{para } x > x_1 \end{cases}$

en el punto x_1 la función tiene *mínimo*. Hay que tener en cuenta que las condiciones a) y b) deben cumplirse para todos los valores de x, suficientemente cercanos al valor x_1, es decir, deben cumplirse en cada punto de la vecindad suficientemente pequeña, del punto crítico x_1.

Demostración. Veamos primero el caso en que el signo de la derivada cambia de «más» a «menos», es decir que para todos los puntos x, suficientemente próximos al punto x_1, se tiene:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > x_1.$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_1)$, obtenemos:

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

donde ξ es un punto comprendido entre x y x_1.

1) Sea $x < x_1$, entonces se tiene:

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

y, por tanto:

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

o sea

$$f(x) < f(x_1). \tag{1}$$

2) Sea $x > x_1$, entonces se tiene:

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

y, por tanto:

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

o sea

$$f(x) < f(x_1). \tag{2}$$

Las correlaciones (1) y (2) muestran que para todos los valores de x, suficientemente cercanos a x_1, los valores de la función son menores que el valor de ésta en el punto x_1. Por consiguiente, en este punto la función $f(x)$ tiene un máximo.

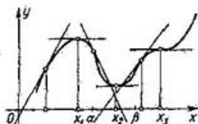


Fig. 105

Del modo análogo se demuestra la segunda parte del teorema, es decir, la condición suficiente para el valor mínimo.

La figura 105 nos ilustra claramente el sentido del teorema 2.

Supongamos que en el punto $x = x_1$ tenemos $f'(x_1) = 0$, y que en cada punto x, suficientemente cercano a x_1, se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_1,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > x_1.$$

Entonces, cuando $x < x_1$ la tangente a la curva forma con el eje Ox un ángulo agudo, y la función crece; cuando $x > x_1$, el ángulo formado por la tangente y el eje Ox es obtuso, y la función decrece. Cuando $x = x_1$, la función creciente comienza a decrecer, es decir, tiene un máximo.

Si en el punto x_2 tenemos $f'(x_2) = 0$ y para todos los valores de x, suficientemente cercanos a x_2 se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < x_2,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_2,$$

entonces, cuando $x < x_2$, la tangente a la curva forma con el eje Ox un ángulo obtuso, y la función decrece; cuando $x > x_2$ el ángulo formado por la tangente y el eje Ox es agudo y la función crece. Cuando $x = x_2$, la función decreciente pasa a ser creciente, es decir, tiene un mínimo.

Si para $x = x_3$ tenemos $f'(x_3) = 0$, y, para todos los valores de x, suficientemente cercanos a x_3, se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_3,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_3,$$

entonces, la función es creciente tanto para $x < x_3$ como para $x > x_3$. Por lo tanto, para $x = x_3$ la función no tiene ni máximo ni mínimo.

Precisamente este es el caso de la función $y = x^3$, cuando $x = 0$. En efecto, la derivada $y' = 3x^2$, por tanto:

$$(y')_{x=0} = 0,$$
$$(y')_{x<0} > 0,$$
$$(y')_{x>0} > 0,$$

lo que significa que en $x = 0$ la función no tiene máximo ni mínimo (fig. 101).

§ 4. ANALISIS DEL MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION DERIVABLE MEDIANTE LA PRIMERA DERIVADA

Basándonos en lo expuesto anteriormente podemos construir el esquema para el análisis de máximos y mínimos de una función derivable $y = f(x)$:

1. Hallar la primera derivada $f'(x)$ de la función.
2. Hallar los valores críticos del argumento x, para lo cual es necesario:

a) igualar a cero la primera derivada y encontrar las raíces reales de la ecuación obtenida $f'(x) = 0$;

b) determinar los valores de x para los cuales la derivada $f'(x)$ es discontinua.

3. Analizar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Puesto que el signo de la derivada permanece invariable en el intervalo entre dos puntos críticos, entonces para

estudiar el signo de la derivada en ambos lados del punto crítico (x_2, por ejemplo) (fig. 105), será suficiente determinar el signo de la derivada en los puntos α y β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, donde x_1 y x_3 son dos puntos críticos más próximos).

4. Calcular los valores de la función $f(x)$ para cada valor crítico del argumento.

De este modo, llegamos al siguiente esquema de casos posibles:

Signos de la derivada $f'(x)$ al pasar por el punto crítico x_1:			Naturaleza del punto crítico
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
$+$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$-$	Punto de máximo
$-$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$+$	Punto de mínimo
$+$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$+$	No hay máximo ni mínimo (la función crece)
$-$	$f'(x_1)=0$ ó es discontinua	$-$	No hay máximo ni mínimo (la función decrece)

Ejemplo 1. Estúdiense el máximo y el mínimo de la función

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

Solución. 1) Hallamos la primera derivada:

$$y'=x^2-4x+3.$$

2) Calculamos las raíces reales de la derivada:

$$x^2-4x+3=0.$$

Por consiguiente,

$$x_1=1, \quad x_2=3.$$

La derivada es continua en todos los puntos y por tanto no existen otros puntos críticos.

3) Analizamos los valores críticos y los resultados los llevamos a la fig. 106. El primer punto crítico es, $x_1 = 1$. Como $y' = (x-1)(x-3)$, resulta que:

$$\text{para } x<1 \text{ se tiene: } y'=(-)\cdot(-)>0,$$
$$\text{para } x>1 \text{ se tiene: } y'=(+)\cdot(-)<0.$$

Esto quiere decir que al pasar (de izquierda a derecha) por el punto $x_1 = 1$, el signo de la derivada cambia de «más» a «menos». Por tanto, en $x = 1$ la función tiene un máximo:

$$(y)_{x=1}=\frac{7}{3}.$$

El segundo punto crítico es $x_2=3$

$$\text{para } x<3 \text{ se tiene } y'=(+)\cdot(-)<0,$$
$$\text{para } x>3 \text{ se tiene } y'=(+)\cdot(+)>0.$$

Esto significa que al pasar por el punto $x=3$ el signo de la derivada cambia de «menos» a «más». Por tanto, en $x=3$ la función tiene mínimo:

$$(y)_{x=3}=1.$$

Basándonos en este análisis trazamos la gráfica de la función (fig. 106)

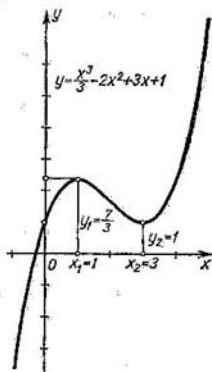


Fig. 106

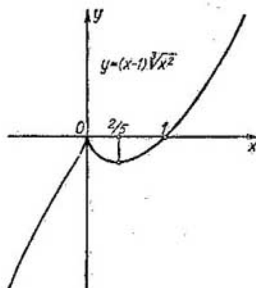


Fig. 107

Ejemplo 2. Analícense los valores máximo y mínimo de la función

$$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Solución. 1) Hallamos la primera derivada:

$$y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Calculamos los valores críticos del argumento: a) encontramos los puntos en los que la derivada se reduce a cero:

$$y'=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0, \quad x_1=\frac{2}{5};$$

b) encontramos los puntos en los cuales la derivada es discontinua (aquí la derivada se reduce al infinito). De tal punto sirve, evidentemente, el punto

$$x_2=0.$$

(Obsérvese que cuando $x_2=0$, la función está definida y es continua).

No existen más puntos críticos.

3) Analizamos la naturaleza de los puntos críticos obtenidos. Veamos primero el punto $x_1 = \frac{2}{5}$. Como

$$(y')_{x<\frac{2}{5}} < 0, \quad (y')_{x>\frac{2}{5}} > 0,$$

deducimos que en $x = \frac{2}{5}$ la función tiene un mínimo. El valor de la función en este punto es igual a

$$(y)_{x=\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5} - 1\right) \sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Veamos ahora el segundo punto crítico, $x = 0$. Como

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0,$$

deducimos que en $x = 0$ la función tiene un máximo, siendo $(y)_{x=0} = 0$. La gráfica de la función analizada se expone en la figura 107.

§ 5. ANALISIS DEL MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION MEDIANTE LA SEGUNDA DERIVADA

Supongamos que en $x = x_1$ la derivada de la función $y = f(x)$ se reduce a cero, es decir, $f'(x_1) = 0$. Admitamos, además que existe la segunda derivada, $f''(x)$, y es continua sobre cierta vecindad del punto x_1. Para este caso es válido el siguiente teorema.

Teorema. *Si $f'(x_1) = 0$, entonces en $x = x_1$ la función tiene máximo cuando $f''(x_1) < 0$, y, un mínimo cuando $f''(x_1) > 0$.*

Demostración. Consideremos la primera parte del teorema Supongamos que $f'(x_1) = 0$ y $f''(x_1) < 0$, como, según la hipótesis, $f''(x)$ es continua en cierta vecindad del punto $x = x_1$, entonces existirá evidentemente un segmento pequeño, que incluya el punto $x = x_1$, en todos los puntos del cual la segunda derivada $f''(x)$ es negativa.

Puesto que $f''(x)$ es la derivada de la primera derivada $f''(x) = (f'(x))'$, de la condición $(f'(x))' < 0$ se infiere que $f'(x)$ decrece en el segmento que contiene el punto $x = x_1$ (§ 2, cap. V). Pero $f'(x_1) = 0$. Por consiguiente, en este segmento tenemos $f'(x) > 0$ cuando $x < x_1$, y $f'(x) < 0$ cuando $x > x_1$, es decir, el signo de la derivada $f'(x)$ cambia de «más» a «menos» al pasar por el punto $x = x_1$, lo que significa que en el punto x_1 la función $f(x)$ admite un máximo. La primera parte del teorema queda demostrada.

Del mismo modo se demuestra la segunda parte: si $f''(x_1) > 0$, entonces $f''(x) > 0$ en todos los puntos del segmento mencionado que incluye el punto x_1; pero, en este caso, en el segmento dado,

$f''(x) = (f'(x))' > 0$ y, por tanto, $f'(x)$ crece. Como $f'(x_1) = 0$, al pasar por el punto x_1, el signo de la derivada $f'(x)$ cambia de «menos» a «más», es decir, la función $f(x)$ tiene un mínimo cuando $x = x_1$.

Si en el punto crítico $f''(x_1) = 0$, entonces en este punto puede haber un máximo o un mínimo, pero puede ocurrir que no exista ni uno ni otro. En este caso hay que realizar el análisis utilizando el primer método (véase § 4, cap. V).

El resultado del análisis de los valores extremos, mediante la segunda derivada, puede ser representado por la tabla siguiente:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Naturaleza del punto crítico
0	$-$	Punto del máximo
0	$+$	Punto del mínimo
0	0	Desconocido

Ejemplo 1. Hallar el máximo y mínimo de la función

$$y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x.$$

Solución. Puesto que la función es periódica y tiene un período de 2π, es suficiente estudiarla en el segmento $[0, 2\pi]$.

1) Hallamos la derivada

$$y' = 2\cos x - 2 \operatorname{sen} 2x = 2(\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x) = 2\cos x\,(1 - 2 \operatorname{sen} x).$$

2) Calculamos los valores críticos del argumento:

$$2\cos x\,(1 - 2 \operatorname{sen} x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}; \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Hallamos la segunda derivada:

$$y'' = -2 \operatorname{sen} x - 4\cos 2x.$$

4) Analizamos la naturaleza de cada punto crítico:

$$(y'')_{x_1 = \frac{\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Por lo tanto, en el punto $x_1 = \frac{\pi}{6}$ tenemos el máximo:

$$(y)_{x = \frac{\pi}{6}} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Luego,

$$(y'')_{x = \frac{\pi}{2}} = -2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 2 > 0.$$

Por consiguiente, en el punto $x_2=\frac{\pi}{2}$ tenemos el mínimo

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}}=2\cdot 1-1=1.$$

En el punto $x_3=\frac{5\pi}{6}$ tenemos:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}}=-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0.$$

Por tanto, para $x_3=\frac{5\pi}{6}$ la función tiene el máximo:

$$(y)_{x_3=\frac{5\pi}{6}}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Finalmente

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}}=-2(-1)-4(-1)=6>0.$$

Consecuentemente, en el punto $x_4=\frac{3\pi}{2}$ tenemos el mínimo:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}}=2(-1)-1=-3.$$

La gráfica de la función analizada se da en la fig. 108.

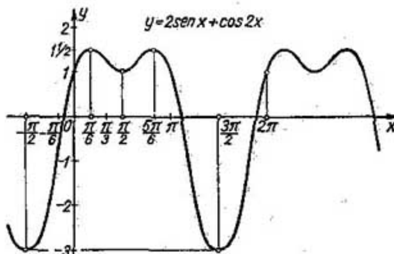


Fig. 108

Mostremos ahora con ejemplos que si $f'(x_1)=0$ y $f''(x_1)=0$, en cierto punto $x=x_1$ la función $f(x)$ puede tener un máximo o un mínimo en el mismo; pero, puede no haber ni uno ni otro.

Ejemplo 2. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y=1-x^4.$$

Solución. 1) Hallemos los puntos críticos:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Determinemos el signo de la segunda derivada cuando $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Por consiguiente, en este caso es imposible determinar la naturaleza del punto crítico con ayuda del signo de la segunda derivada.

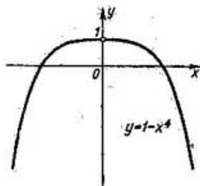


Fig. 109

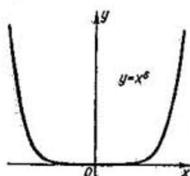


Fig. 110

3) Investiguemos la naturaleza del punto crítico utilizando el primer método (§ 4, cap. V):

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Por tanto, cuando $x = 0$, la función tiene como máximo:

$$(y)_{x=0} = 0.$$

La gráfica de la función examinada se muestra en la fig. 109.

Ejemplo 3. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = x^6.$$

Solución. Mediante el segundo método, hallamos:

1) $y' = 6x^5, \quad y' = 6x^5 = 0, \quad x = 0$; 2) $y'' = 30x^4, \quad (y'')_{x=0} = 0.$

Por consiguiente, el segundo método no da la respuesta. Recurriendo al primer método, obtenemos:

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Por tanto, cuando $x = 0$ la función tiene un mínimo (fig. 110).

Ejemplo 4. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = (x-1)^3.$$

Solución. El segundo método

$$y' = 3(x-1)^2, \quad 3(x-1)^2 = 0, \quad x = 1;$$

$$y'' = 6(x-1), \quad (y'')_{x=1} = 0.$$

En este caso el segundo método no da la respuesta. Utilizando el primer método, hallamos:

$$(y')_{x<1}>0, \quad (y')_{x>1}>0.$$

Por tanto, cuando $x=1$, la función no tiene máximo ni mínimo (fig. 111).

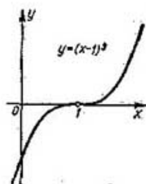


Fig. 111

§ 6. VALORES MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION EN UN SEGMENTO

Sea $y = f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$. Entonces en este segmento la función alcanza su valor máximo (§ 10, cap. II). Supongamos que en el segmento dado la función $f(x)$ tenga un número finito de puntos críticos. Si el valor máximo se alcanza dentro del segmento $[a, b]$, es evidente que este valor será uno de los máximos de la función (si hay varios máximos), o sea, el máximo mayor. Pero puede ocurrir que el valor máximo es alcanzable en uno de los extremos del segmento.

Así pues, en el segmento $[a, b]$ la función adquiere su valor máximo en uno de los extremos del segmento dado, o bien en un punto interior del mismo, el del valor máximo.

Lo mismo puede decirse sobre el valor mínimo de la función: éste es alcanzable en uno de los extremos del segmento, o en un punto interior del mismo: en el punto del mínimo. De lo dicho se infiere la siguiente regla: para hallar el valor máximo de una función continua en el segmento $[a, b]$, es preciso:

1) hallar todos los máximos de la función en el segmento;

2) determinar los valores de la función en los extremos del segmento, es decir, calcular $f(a)$ y $f(b)$;

3) elegir el mayor valor de todos los valores obtenidos de la función. Este representará el valor máximo de la función en el segmento. Del mismo modo se debe proceder al determinar el valor mínimo de la función en el segmento.

Ejemplo. Determinar los valores máximo y mínimo de la función

$$y=x^3-3x+3 \text{ en el segmento } \left[-3;\ \frac{3}{2}\right].$$

Solución. 1) Hallemos los máximos y mínimos de la función en el segmento $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right]$:

$$y'=3x^2-3,\quad 3x^2-3=0,\quad x_1=1,\quad x_2=-1,$$
$$y''=6x,\quad (y'')_{x=1}=6>0.$$

Por tanto, en el punto $x=1$ hay un mínimo:

$$(y)_{x=1}=1.$$

Luego

$$(y'')_{x=-1}=-6<0.$$

Por lo tanto, en el punto $x=-1$ hay un máximo:

$$(y)_{x=-1}=5.$$

2) Determinar los valores de la función en los extremos del segmento:

$$(y)_{x=\frac{3}{2}}=\frac{15}{8},\qquad (y)_{x=-3}=-15.$$

De este modo, el valor máximo de la función examinada en el segmento $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right]$ es: $(y)_{x=-1}=5$, y el valor mínimo es:

$$(y)_{x=-3}=-15.$$



Fig. 112

La gráfica de la función está representada en la fig. 112.

§ 7. APLICACION DE LA TEORIA DE MAXIMOS Y MINIMOS DE LAS FUNCIONES A LA SOLUCION DE PROBLEMAS

La teoría de máximos y mínimos permite resolver varios problemas de geometría, mecánica, etc. Analicemos algunos de ellos.

Problema 1. La distancia $R=OA$ (fig. 113) (en el vacío) que cubre un proyectil, lanzado con velocidad inicial v_0 desde una pieza de artillería que tiene un ángulo de elevación φ respecto al horizonte, se determina según la fórmula:

$$R=\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

(g es la aceleración de la gravedad). Determinar el ángulo φ con el cual la distancia R resultará máxima, dada la velocidad inicial v_0.

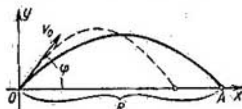


Fig. 113

Solución. La magnitud R es una función del ángulo variable φ. Analicemos el máximo de esta función en el segmento $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}; \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0; \quad \text{valor crítico} \quad \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}; \quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Por tanto, para $\varphi = \frac{\pi}{4}$ la función R tiene el máximo:

$$(R)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Los valores de la función R en los extremos del segmento $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ son iguales a:

$$(R)_{\varphi = 0} = 0, \qquad (R)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0.$$

De este modo, el máximo hallado es precisamente el mayor valor de R.

Problema 2. ¿Que dimensiones debe tener un cilindro para que sea mínima su área total S, dado el volumen v?

Solución. Designando por r y h el radio de la base del cilindro y su altura, respectivamente, tendremos:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Si el volumen del cilindro es conocido, h se expresa en función de r según la fórmula:

$$v = \pi r^2 h,$$

de donde

$$h=\frac{v}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo la expresión de h en la fórmula para S, obtenemos:

$$S=2\pi r^2+2\pi r\,\frac{v}{\pi r^2},$$

o sea

$$S=2\left(\pi r+\frac{v}{r}\right).$$

Aquí, v es el número dado. Por consiguiente hemos representado S como función de una variable independiente r. Hallemos el valor mínimo de esta función en el intervalo $0<r<\infty$:

$$\frac{dS}{dr}=2\left(2\pi r-\frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r-\frac{v}{r^2}=0,\quad r_1=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1}=2\left(2\pi+\frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1}>0.$$

Por consiguiente, la función S tiene un mínimo en el punto $r=r_1$. Como $\lim\limits_{r\to 0} S=\infty$ y $\lim\limits_{r\to\infty} S=\infty$, es decir, cuando r tiende a cero o al infinito, el área S crece infinitamente, lo que atestigua que la función S tiene un valor mínimo en el punto $r=r_1$.

Pero, si $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, resulta: $h=\frac{v}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}=2r.$

Por tanto, para que el área total S sea mínima, dado el volumen v, la altura del cilindro debe ser igual al diámetro de éste.

§ 8. ANALISIS DE LOS VALORES MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION MEDIANTE LA FORMULA DE TAYLOR

Como se ha indicado en el § 5, capítulo V, si en algún punto $x=a$ tenemos $f'(a)=0$ y $f''(a)=0$, en éste puede haber un máximo o un mínimo, o bien no haya ni uno, ni otro. Hemos señalado que para resolver el problema en el caso dado, se recomienda realizar

el análisis mediante el primer método, es decir, estudiando el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha del punto $x = a$.

En este caso se puede también realizar el estudio mediante la fórmula de Taylor (§ 6, cap. IV).

Con el fin de generalizar el estudio supongamos que no sólo $f''(x)$, sino todas las derivadas de la función $f(x)$, hasta el orden n — ésimo inclusive, se reducen a cero cuando $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0, \quad (1)$$

mientras que

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Supongamos también que $f(x)$ tiene derivadas continuas hasta el orden $(n + 1)$ inclusive, en la vecindad del punto $x = a$.

Escribamos la fórmula de Taylor para $f(x)$, tomando en cuenta las igualdades (1):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2)$$

donde ξ es un número comprendido entre a y x. Como $f^{(n+1)}(x)$ es continua en la vecindad del punto a y $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, existirá un número positivo h tan pequeño que para todo x, que satisfaga la desigualdad $|x - a| < h$, se tenga $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Además, si $f^{(n+1)}(a) > 0$, en todos los puntos del intervalo $(a - h, a + h)$ será $f^{(n+1)}(x) > 0$; si $f^{(n+1)}(a) < 0$, en todos los puntos del intervalo mencionado $f^{(n+1)}(x)$ será negativa.

Escribamos la fórmula (2) en la forma:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2')$$

y examinemos diferentes casos particulares.

Primer caso: n es un número impar.

a) Sea $f^{(n+1)}(a) < 0$. Entonces existirá tal intervalo $(a - h, a+h)$, en cada punto del cual la derivada de orden $(n+1)$ es negativa. Siendo x un punto de este intervalo, ξ también se encontrará entre $a - h$ y $a + h$. Por consiguiente, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Puesto que $n + 1$ es un número par, entonces $(x - a)^{n+1} > 0$ cuando $x \neq a$, y, por eso, el segundo miembro de la fórmula (2′) es negativo.

Por consiguiente, cuando $x \neq a$ en todos los puntos del intervalo $(a - h, a + h)$ tenemos:

$$f(x) - f(a) < 0,$$

lo que significa que la función tiene un máximo en el punto $x = a$.

b) Sea $f^{(n+1)}(a) > 0$. Entonces, para un valor h suficientemente pequeño tenemos $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ en todos los puntos x del intervalo

$(a-h,\ a+h)$. Por tanto, el segundo miembro de la fórmula (2′) será positivo, es decir, cuando $x \neq a$, en todos los puntos del intervalo indicado será:

$$f(x) - f(a) > 0,$$

lo que significa que la función tiene un mínimo en el punto $x = a$.

Segundo caso: n es un número par.

El número $n+1$ será impar y la magnitud $(x-a)^{n+1}$ tendrá signos opuestos cuando $x < a$ y $x > a$. Si h es suficientemente pequeño en valor absoluto, la derivada de orden $(n+1)$ en todos los demás puntos del intervalo $(a-h,\ a+h)$ conserva el mismo signo que en el punto a. Por consiguiente, $f(x) - f(a)$ tiene signos diferentes para $x < a$, y para $x > a$. Esto significa que en el punto $x = a$ no existe máximo, ni mínimo.

Observemos que, si n es par y $f^{(n+1)}(a) > 0$, entonces $f(x) < f(a)$ para $x < a$, y $f(x) > f(a)$ para $x > a$. Pero si n es par y $f^{(n+1)}(a) < 0$, entonces $f(x) > f(a)$ para $x < a$, y $f(x) < f(a)$ para $x > a$.

Se puede formular los resultados obtenidos del modo siguiente: Cuando $x = a$, tenemos:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$$

y la primera derivada $f^{(n+1)}(a)$, que no se anula, es de orden *par* entonces en el punto a la función $f(x)$ tiene un *máximo*, si $f^{(n+1)}(a) < 0$; la función $f(x)$ tiene un *mínimo*, si es $f^{(n+1)}(a) > 0$. Si la primera derivada $f^{(n+1)}(a)$, que no se anula, es la de orden *impar*, en el punto a la función no tiene máximo, ni mínimo. Además,

$$f(x) \text{ crece, si } f^{(n+1)}(a) > 0;$$
$$f(x) \text{ decrece, si } f^{(n+1)}(a) < 0.$$

Ejemplo. Analizar el máximo y el mínimo de la función:

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Solución. Hallemos los valores críticos de la función

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

De la ecuación

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

obtenemos el único punto crítico:

$$x = 1$$

(ya que la ecuación dada tiene sólo una raíz real).

A continuación estudiamos la naturaleza del punto crítico $x = 1$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \text{ para } x = 1,$$

$$f'''(x) = 24x - 24 = 0 \text{ para } x = 1,$$

$$y^{IV}(x) = 24 > 0 \text{ para todo } x \text{ cualquiera.}$$

Por consiguiente, cuando $x = 1$, la función $f(x)$ tiene un mínimo.

§ 9. CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE LA CURVA. PUNTOS DE INFLEXION

Sea una curva plana $y = f(x)$ que representa la función $f(x)$, uniforme y derivable.

Definición. Se dice que la curva es *convexa hacia arriba* en el intervalo (a, b), si todos los puntos de la misma están por debajo de cualquier tangente a la curva en este intervalo.

Se dice que la curva es *convexa hacia abajo* en el intervalo (b, c), si todos los puntos de la misma están situados por arriba de cualquier tangente a la curva en este intervalo.

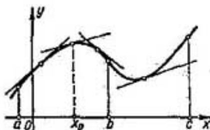


Fig. 114

La curva que tiene la convexidad hacia arriba se llama *convexa*, igual que la curva que tiene la convexidad hacia abajo se denomina *cóncava*.

En la figura 114 se muestra una curva convexa en el intervalo (a, b) y cóncava en el intervalo (b, c).

La dirección de la convexidad de la curva es una característica importante de su forma. A continuación determinemos los criterios según los cuales, durante el estudio de la función $y = f(x)$, podemos juzgar sobre la dirección de su convexidad en diferentes intervalos.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1. *Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es negativa en todos los puntos del intervalo (a, b), es decir, si $f''(x) < 0$, la curva $y=f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia arriba en este intervalo (la curva es convexa).*

Demostración. Tomemos en el intervalo (a, b) un punto arbitrario $x = x_0$ (fig. 114) y tracemos una tangente a la curva en el punto cuya abscisa es $x = x_0$. El teorema quedará demostrado, si establecemos que todos los puntos de la curva en el intervalo (a, b) están situados por debajo de la tangente, es decir, la ordenada de cualquier punto de la curva $y = f(x)$ es menor que la ordenada y de la tangente, para un mismo valor de x.

La ecuación de la curva es:

$$y = f(x) \tag{1}$$

La ecuación de la tangente a la curva en el punto $x = x_0$ tiene la forma:

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

o sea

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que para un mismo valor de x la diferencia de las ordenadas de la curva y de la tangente es igual a:

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_0)$, obtenemos:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(donde c se encuentra entre x_0 y x) o sea,

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Apliquemos de nuevo el teorema de Lagrange a la expresión del corchete:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

(donde c_1 se encuentra entre x_0 y c).

Examinemos primero el caso, cuando $x > x_0$. Aquí: $x_0 < c < x$, puesto que

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0;$$

además, según la condición:

$$f''(c_1) < 0,$$

de la ecuación (3) se deduce que $y - \bar{y} < 0$.

Examinemos ahora el caso cuando $x < x_0$. Por ahora: $x < c < c_1 < x_0$, y $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$. Puesto que, según la condición, $f''(c_1) < 0$, entonces de la igualdad (3) se deduce que:

$$y - \bar{y} < 0.$$

Hemos comprobado que cualquier punto de la curva está situado por debajo de la tangente a la misma, cualesquiera que sean los valores de x y x_0 en el intervalo (a, b). Esto significa que la curva es convexa. Queda así demostrado el teorema.

Del mismo modo se comprueba el teorema siguiente:

Teorema 1'. *Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es positiva en todos los puntos del intervalo (b, c), es decir, si $f''(x) > 0$, la curva $y = f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia abajo en este intervalo (la curva es cóncava).*

Observación. El significado geométrico de los teoremas 1 y 1' puede ser interpretado de modo siguiente. Estudiemos la curva $y = f(x)$ que tiene su convexidad dirigida hacia arriba en el intervalo (a, b) (fig. 115). La derivada $f'(x)$ es igual a la tangente del

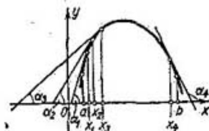


Fig. 115

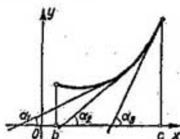


Fig. 116

ángulo α formado por la línea tangente a la curva y el eje Ox en el punto de abscisa x, es decir, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Por lo tanto $f''(x) = [\operatorname{tg} \alpha]'_x$.

Si $f''(x) < 0$ para cualquier x en el intervalo (a, b), esto quiere decir que $\operatorname{tg} \alpha$ decrece a medida que crece x. Desde el punto de vista geométrico está claro que si $\operatorname{tg} \alpha$ decrece a medida que crece x, entonces la curva correspondiente será convexa. El teorema 1 es la comprobación analítica de esta deducción. Del mismo modo se interpreta geométricamente el teorema 1' (fig. 116).

Ejemplo 1. Determinar los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva dada por la ecuación:

$$y = 2 - x^2,$$

Solución. La segunda derivada es

$$y'' = -2 < 0$$

para cualquier valor de x. Por consiguiente, la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba en todos los puntos (fig. 117).

Ejemplo 2. Una curva está dada por la ecuación

$$y = e^x.$$

Puesto que:

$$y'' = e^x > 0,$$

para todos los valores de x, la curva es cóncava en todos los puntos, es decir, su convexidad está dirigida hacia abajo (fig. 118).

Ejemplo 3. Una curva está representada por la ecuación

$$y = x^3.$$

Puesto que:

$$y'' = 6x$$

entonces $y'' < 0$ para $x < 0$, e $y'' > 0$ para $x > 0$. Por consiguiente, la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba cuando $x < 0$ y hacia abajo, cuando $x > 0$ (fig. 119).

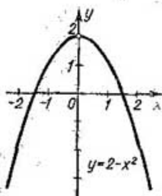


Fig. 117

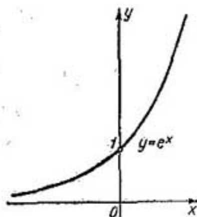


Fig. 118

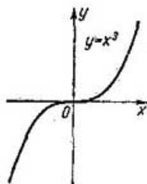


Fig. 119

Definición 2. El punto que en una curva continua separa la parte convexa de la cóncava, se llama *punto de inflexión* de la curva.

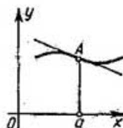


Fig. 120

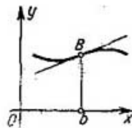


Fig. 121

En las figuras 119, 120 y 121 los puntos O, A y B son los puntos de inflexión.

Es evidente que en el punto de inflexión la tangente *corta* a la curva de modo que a un lado del punto la curva está situada por debajo de la tangente, y al otro lado, por encima de ésta.

Establezcamos ahora las condiciones suficientes para que el punto dado de la curva sea el de inflexión.

Teorema 2. *Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva. Si $f''(a) = 0$, o $f''(a)$ no existe, y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor $x = a$, entonces, el punto de la curva de abscisa $x = a$ es el punto de inflexión.*

Demostración. 1) Sea $f''(x) < 0$ cuando $x < a$, y $f''(x) > 0$, cuando $x > a$. Entonces, para $x < a$ la curva es convexa y para $x > a$ es cóncava. Por tanto, el punto A de la curva, de abscisa $x = a$, es el punto de inflexión (fig. 120).

2) Si $f''(x) > 0$ cuando $x < b$, y $f''(x) < 0$, cuando $x > b$, entonces para $x < b$ la curva es cóncava y para $x > b$ es convexa. Por consiguiente el punto B de la curva de abscisa $x = b$ es el punto de inflexión (fig. 121).

Ejemplo 4. Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva

$$y = e^{-x^2} \text{ (curva de Gauss).}$$

Solución. 1) Hallemos las derivadas primera y segunda:

$$y' = -2xe^{-x^2},$$

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) La derivada segunda existe en todos los puntos. Hallemos los valores de x para los cuales $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Analicemos los valores obtenidos:

$$\text{para } x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' > 0,$$

$$\text{para } x > -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' < 0.$$

La segunda derivada cambia de signo al pasar por el punto x_1, por tanto para $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ en la curva hay un punto de inflexión. Sus coordenadas son: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$;

$$\text{para } x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' < 0,$$

$$\text{para } x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' > 0.$$

Por consiguiente, para $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en la curva también existe un punto de inflexión, cuyas coordenadas son: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. La existencia del segundo punto de inflexión se deduce también de la simetría de la curva respecto al eje Oy.

4) De lo anterior se deduce que:

para $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la curva es cóncava

para $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ la curva es convexa

para $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ la curva es cóncava.

5) De la expresión de la primera derivada

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

se deduce que:

si $x < 0$, $y' > 0$, es decir, la función crece;
si $x > 0$, $y' < 0$, es decir, la función decrece;
si $x = 0$, $y' = 0$.

En este punto la función tiene un máximo, o bien $y = 1$.

Basándose en el estudio realizado es fácil construir la gráfica de la curva (fig. 122).

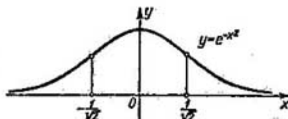


Fig. 122

Ejemplo 5. Analizar los puntos de inflexión de la curva

$$y = x^4.$$

Solución: 1) Hallemos la segunda derivada.

$$y'' = 12x^2.$$

2) Determinemos los puntos para los cuales $y'' = 0$:

$$12x^2 = 0, \ x = 0.$$

3) Analicemos el valor obtenido de $x = 0$:

si $x < 0$, $y'' > 0$, la curva es cóncava;
si $x > 0$, $y'' > 0$, la curva es cóncava.

Por consiguiente, la curva no tiene puntos de inflexión (fig. 123).

Ejemplo 6. Analizar los puntos de inflexión de la curva

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Solución. 1) Hallemos las derivadas primera y segunda:

$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}};\quad y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2) La segunda derivada no se reduce a cero en ningún punto, pero tampoco existe cuando $x = 1$, ($y'' = \pm\infty$).

3) Analicemos el valor de $x = 1$:

si $x < 1$, $y'' > 0$, la curva es cóncava;

si $x > 1$, $y'' < 0$, la curva es convexa.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = 1$ que es punto $(1; 0)$.

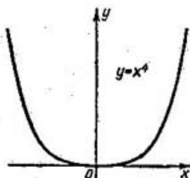


Fig. 123

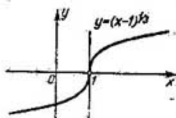


Fig. 124

Observemos que $y' = \infty$ cuando $x = 1$, es decir, la tangente a la curva en este punto es vertical (fig. 124).

§ 10. ASINTOTAS

Frecuentemente es preciso estudiar la forma de una curva $y = f(x)$, y, por tanto, la variación de la función correspondiente cuando la abscisa y la ordenada de un punto variable de la curva, juntas, o por separado *tienden al infinito* (según la magnitud absoluta). Aquí tiene especial importancia el caso en que la curva estudiada se aproxima indefinidamente a una recta, al tender el punto desplazable de la curva hacia el infinito*.

Definición. Si la distancia δ entre una recta A y el punto desplazable M de la curva tiende a cero, mientras que el punto M tiende al infinito, esta recta recibe el nombre de *asíntota* de la curva (figs. 125 y 126).

---

*) Se dice que el punto desplazable M se mueve a lo lagro de una curva hacia infinito, si la distancia entre este punto y el origen de coordenadas crece indefinidamente.

Para estudios ulteriores vamos a distinguir las asíntotas *verticales* (paralelas al eje de ordenadas), de las *oblicuas* (no paralelas al eje de ordenadas).

I. Asíntotas verticales.

De la definición de asíntota se deduce que si $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, ó $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, o bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, la recta $x = a$ es la asíntota de la curva $y = f(x)$. Recíprocamente, si la recta $x = a$ es una asíntota, se cumple una de estas igualdades.

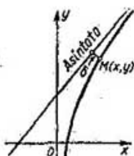


Fig. 125

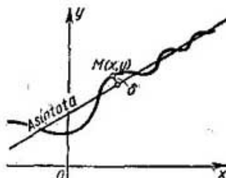


Fig. 126

Por consiguiente, para determinar las asíntotas verticales es preciso encontrar tales valores de $x = a$ que, al aproximarse a los mismos, la función tienda al infinito. En este caso la recta $x = a$ será asíntota vertical.

Ejemplo 1. La curva $y = \frac{2}{x-5}$ tiene una asíntota vertical $x = 5$, puesto que $y \to \infty$ cuando $x \to 5$ (fig. 127).

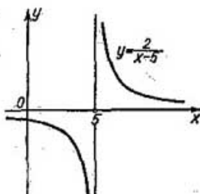


Fig. 127

Ejemplo 2. La curva $y = \operatorname{tg} x$ tiene infinidad de asíntotas verticales:

$$x = \pm\frac{\pi}{2};\quad x = \pm\frac{3\pi}{2};\quad x = \pm\frac{5\pi}{2};\ \ldots$$

Esto se deduce de que $\operatorname{tg} x \to \infty$, cuando x tiende a los valores $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... o a los valores $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, ... (fig. 128).

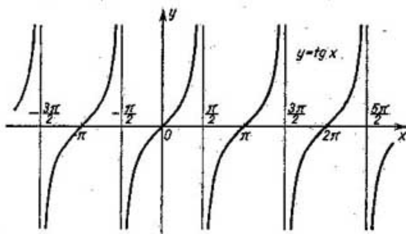


Fig. 128

Ejemplo 3. La curva $y = e^{\frac{1}{x}}$ tiene una asíntota vertical $x = 0$, puesto que $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (fig. 129).

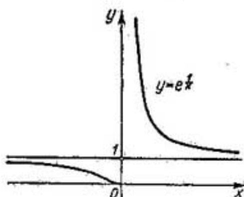


Fig. 129

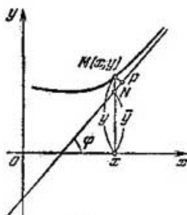


Fig. 130

II. Asíntotas oblicuas.

Supongamos que la curva $y = f(x)$ tiene una asíntota oblicua, cuya ecuación es:

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Determinemos los números k y b (fig. 130). Sea $M(x, y)$ un punto de la curva y $N(x, \bar{y})$, un punto de la asíntota. La longitud del segmento MP es igual a la distancia entre el punto M y la asíntota. Según la hipótesis

$$\lim_{x \to +\infty} MP = 0. \tag{2}$$

Designando con φ el ángulo formado por la asíntota y el eje Ox, del ΔNMP hallamos:

$$NM = \frac{MP}{\cos\varphi}.$$

Puesto que φ es un ángulo invariable $\left(\text{diferente de } \frac{\pi}{2}\right)$, según la igualdad anterior tenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} NM = 0. \tag{2'}$$

Recíprocamente, de la igualdad (2′) se deduce la igualdad (2). Pero

$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

la igualdad (2′) toma la forma:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \tag{3}$$

Así que, si la recta (1) es una asíntota, se cumple la igualdad (3). Recíprocamente, si para k y b constantes se cumple la igualdad (3), la recta $y = kx + b$ será asíntota.

Determinemos ahora k y b. Despejando x en la igualdad (3), obtenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Puesto que $x \to +\infty$, debe cumplirse la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Cuando b es constante, $\lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} = 0$. Por tanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0,$$

o sea

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{4}$$

Conciendo k, hallamos b de la igualdad (3):

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]. \tag{5}$$

De suerte que si la recta $y = kx + b$ es una asíntota, entonces k y b se encuentran según las fórmulas (4) y (5). Recíprocamente, si existen los límites (4) y (5), se cumple la igualdad (3) y la recta $y = kx + b$ es una asíntota. Si uno de los límites (4) y (5) no existe, la curva no tiene asíntota.

Observemos que hemos estudiado el problema referente a la figura 130, cuando $x \to +\infty$; sin embargo, todos los razonamientos son válidos también para el caso cuando $x \to -\infty$.

Ejemplo 4. Hallar las asíntotas de la curva

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Solución: 1) Hallamos las asintotas verticales:

$$\text{cuando } x \to -0, \quad y \to +\infty;$$
$$\text{cuando } x \to +0, \quad y \to -\infty.$$

Por consiguiente, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

2) Encontremos las asíntotas oblicuas

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1,$$

es decir,

$$k = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right] =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2$$

o bien,

$$b = 2.$$

Por consiguiente, la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de la curva dada.

Para estudiar la disposición mutua de la asíntota y de la curva, examinemos la diferencia de las ordenadas de la curva y de la asíntota para un mismo valor de x:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$

La diferencia es negativa para $x > 0$, y positiva para $x < 0$; por tanto cuando $x > 0$, la curva está situada debajo de la asíntota, y cuando $x < 0$, encima de la asíntota (fig. 131).

Ejemplo 5. Hallar las asíntotas de la curva

$$y = e^{-x} \operatorname{sen} x + x.$$

Solución 1) Evidentemente no existen asíntotas verticales.
2) Las asíntotas oblicuas serán:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\operatorname{sen}x+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}\operatorname{sen}x}{x}+1\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}\operatorname{sen}x+x-x]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\operatorname{sen}x=0.$$

Por consiguiente, la recta

$$y=x$$

es una asíntota oblicua para $x\to+\infty$. La curva dada no tiene asíntota cuando $x\to-\infty$. En efecto, no existe $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}$, puesto que $\frac{y}{x}=\frac{e^{-x}}{x}\operatorname{sen}x+1$.

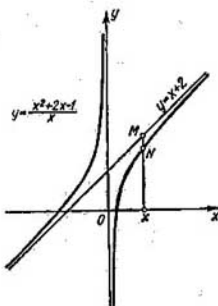


Fig. 131

(Aquí, el primer sumando crece indefinidamente cuando $x\to-\infty$, y, por tanto, no tiene límite).

§ 11. ESQUEMA GENERAL DEL ANALISIS DE FUNCIONES Y DE LA CONSTRUCCION DE GRAFICAS

El análisis de funciones se reduce generalmente a la determinación de los siguientes elementos:

1) el dominio natural de definición de la función;
2) los puntos de discontinuidad de la función;
3) los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función;
4) los puntos de máximo y mínimo, así como los valores máximos y mínimos de la función;

5) los dominios de convexidad y concavidad de la gráfica y los puntos de inflexión;

6) las asíntotas de la gráfica de la función.

Este análisis permite construir la gráfica de la función (a veces resulta más conveniente trazar los elementos de la gráfica simultáneamente con el análisis).

Observación 1. Si la función estudiada $y = f(x)$ es *par*, es decir, es tal que el valor de la función no varía cuando el argumento cambia de signo, es decir, si:

$$f(-x) = f(x),$$

será suficiente analizar la función y construir su gráfica sólo para los valores positivos del argumento, pertenecientes al dominio de definición de la función. Para los valores negativos del argumento la gráfica de la función se construye teniendo en cuenta que una función par tiene su gráfica simétrica respecto al eje de ordenadas.

Ejemplo 1. La función $y = x^2$ es par, puesto que $(-x^2) = (x)^2$ (véase fig. 5).

Ejemplo 2. La función $y = \cos x$ es par, puesto que $\cos(-x) = \cos(x)$ (véase fig. 16).

Observación 2. Si la función $y = f(x)$ es *impar*, es decir, que la función cambia de signo cuando varía el argumento, o sea, si:

$$f(-x) = -f(x),$$

será suficiente analizar la función para los valores positivos del argumento. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo 3. La función $y = x^3$ es impar, puesto que $(-x^3) = -x^3$ (véase fig. 7).

Ejemplo 4. La función $y = \operatorname{sen} x$ es impar, puesto que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (véase fig. 15).

Observación 3. Como el conocimiento de algunas propiedades de una función permite hacer conclusiones sobre las otras, a veces resulta conveniente elegir el orden del análisis partiendo de las particularidades de la función dada. Por ejemplo, si determinamos que la función dada es continua y derivable, y encontramos los puntos de máximo y mínimo de la misma, quedan determinados también los dominios de crecimiento y decrecimiento de la función.

Ejemplo 5. Analizar la función,

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

y construir su gráfica.

Solución. 1) El dominio de definición de la función es el intervalo $-\infty < x < +\infty$. Inmediatamente observamos que para $x < 0$ tenemos $y < 0$ y para $x > 0$ tenemos $y > 0$.

2) La función es continua en todos los puntos.

3) Analicemos los máximos y mínimos de la función partiendo de la ecuación

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Hallamos los puntos críticos

$$x_1 = -1, \; x_2 = 1.$$

Analicemos ahora la naturaleza de los puntos críticos:

$$\text{cuando } x_1 < -1 \text{ tenemos } y' < 0;$$
$$\text{cuando } x_1 > -1 \text{ tenemos } y' > 0.$$

Por tanto, la función tiene un mínimo cuando $x = -1$:

$$y_{\text{mín}} = (y)_{x=-1} = -0{,}5.$$

De igual manera:

$$\text{cuando } x < 1 \text{ tenemos } y' > 0;$$
$$\text{cuando } x > 1 \text{ tenemos } y' < 0.$$

Por tanto, la función tiene un máximo cuando $x = 1$:

$$y_{\text{máx}} = (y)_{x=1} = 0{,}5.$$

4) Determinemos los campos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$\text{cuando} \begin{cases} -\infty < x < -1 \text{ tenemos } y' < 0: \text{la función decrece;} \\ -1 < x < 1 \text{ tenemos } y' > 0: \text{la función crece;} \\ 1 < x < +\infty \text{ tenemos } y' < 0: \text{la función decrece.} \end{cases}$$

5) Determinemos los campos de convexidad y concavidad de la curva y los puntos de inflexión partiendo de la ecuación

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

obtenemos:

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Estudiando y'' como función de x, encontramos que:

para $-\infty < x < -\sqrt{3}$ tenemos $y'' < 0$: la curva es convexa;
para $-\sqrt{3} < x < 0$ tenemos $y'' > 0$: la curva es cóncava;
para $0 < x < \sqrt{3}$ tenemos $y'' < 0$: la curva es convexa:
para $\sqrt{3} < x < +\infty$ tenemos $y'' > 0$: la curva es cóncava.

Por tanto, el punto de coordenadas: $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, es el de inflexión, lo mismo que los puntos $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

6) Hallemos las asíntotas de la curva:

$$\text{para } x \to +\infty \text{ tenemos } y \to 0;$$
$$\text{para } x \to -\infty \text{ tenemos } y \to 0.$$

Por consiguiente, la recta $y = 0$ es la única asíntota oblicua. La curva no tiene asíntotas verticales, puesto que no existe ningún valor finito de x para el cual la función tienda al infinito.

La gráfica de la curva estudiada está expuesta en la figura 132.

Ejemplo 6. Analizar la función

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$$

y construir su gráfica.

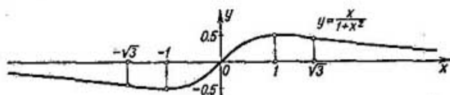


Fig. 132

Solución. 1) La función está definida para todos los valores de x.

2) La función es continua en todos los puntos.

3) Analicemos los máximos y los mínimos de la función:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}.$$

La derivada existe en todos los puntos a excepción de los siguientes:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 2a.$$

Analicemos los valores límites de la derivada para $x \to -0$ y para $x \to +0$:

$$\lim_{x \to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a + x)^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a + x)^2}} = +\infty$$

para $x < 0$ tenemos $y' < 0$, para $x > 0$ tenemos $y' > 0$.

Por tanto, la función tiene un mínimo cuando $x = 0$. El valor de la función en este punto es cero.

Estudiemos ahora la función en otro punto crítico $x_2 = 2a$. Si $x \to 2a$, la derivada también tiende al infinito. Sin embargo, en este caso, para todos los valores de x próximos a $2a$ (tanto a la derecha como a la izquierda del punto $2a$), la derivada es negativa. En consecuencia, en este punto la función no tiene máximo, ni mínimo. En el punto $x_2 = 2a$, como también en la proximidad de éste, la función decrece. La tangente a la curva en este punto es vertical.

Cuando $x = \frac{4a}{3}$ la derivada se reduce a cero. Estudiemos la naturaleza de este punto crítico. Analizando la expresión de la primera derivada, observemos que

$$\text{para } x < \frac{4a}{3} \text{ tenemos } y' > 0, \quad \text{para } x > \frac{4a}{3} \text{ tenemos } y' < 0.$$

Por tanto, la función tendrá un máximo para $x=\frac{4a}{3}$:

$$y_{\text{máx}}=\frac{2}{3}\ a\ \sqrt[3]{4}.$$

4) Utilizando los resultados del análisis efectuado obtenemos los campos de crecimiento y decrecimiento de la función:

para $-\infty<x<0$ la función decrece;

para $0<x<\frac{4a}{3}$ la función crece;

para $\frac{4a}{3}<x<+\infty$ la función decrece.

5) Hallemos los campos de convexidad y concavidad de la curva y puntos de inflexión: la segunda derivada

$$y''=-\frac{8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2a-x)^{\frac{5}{3}}}$$

no se reduce a cero en ningún punto. Sin embargo existen dos puntos en los que la segunda derivada es discontinua: los puntos $x_1=0$ y $x_2=2a$.

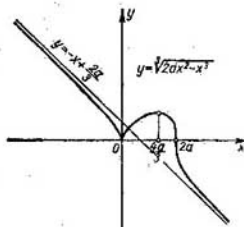


Fig. 133

Investiguemos el signo de la segunda derivada en la proximidad de cada uno de estos puntos: cuando $x<0$ tenemos $y''<0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba;
cuando $x>0$ tenemos $y''<0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba.

Quiere decir que el punto de abscisa $x=0$ no es el punto de inflexión.

Cuando $x<2a$ se tiene $y''<0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba.

Cuando $x>2a$ se tiene $y''>0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia abajo.

Quiere decir que el punto $(2a;\ 0)$ de la curva es el de inflexión.

6) Hallemos las asíntotas de la curva

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2ax^2-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2ax^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x^2}=\frac{2a}{3}.$$

Por tanto, la recta

$$y=-x+\frac{2a}{3}$$

es una asíntota oblicua de la curva

$$y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}.$$

La gráfica de la función estudiada se da en la fig. 133.

§ 12. ANALISIS DE LAS CURVAS DADAS EN FORMA PARAMETRICA

Sea la curva dada por ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t).\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En este caso el análisis y la construcción de la curva se efectúan de manera análoga a la que ha sido utilizada para la curva dada por la ecuación

$$y=f(x).$$

Primeramente calculamos las derivadas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\varphi'(t),\\ \frac{dy}{dt}&=\psi'(t).\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Para los puntos de la curva en la proximidad de los cuales ésta sirve de gráfica de la función $y=f(x)$, calculamos la derivada

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (3)$$

Encontremos los valores del parámetro $t=t_1, t_2, \ldots t_k$ para los cuales por lo menos una de las derivadas, $\varphi'(t)$ o $\psi'(t)$, se reduce a cero o tiene discontinuidad. (Tales valores de t los llamaremos críticos). Según la fórmula (3), determinemos el signo de la derivada $\frac{dy}{dx}$ en cada uno de los intervalos (t_1, t_2); (t_2, t_3); . . .; (t_{k-1}, t_k)

y, por tanto, en cada uno de los intervalos (x_1, x_2); (x_2, x_3); ... ...; (x_{k-1}, x_k) donde $x_i = \varphi(t_i)$. De esta manera quedan determinados los dominios de crecimiento y decrecimiento. Esto da la posibilidad de determinar la naturaleza de los puntos que corresponden a los valores del parámetro $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Luego calculamos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{4}$$

Esta fórmula nos permite determinar la dirección de la convexidad en cada punto de la curva. Para hallar las asíntotas, encontramos tales valores de t, en cuya proximidad una de las variables, x o y, tienda al infinito y tales valores de t en cuya proximidad x e y tiendan al infinito. Después realizamos el estudio de la curva del modo habitual. Mostremos con ejemplos algunas particularidade del estudio de las curvas dadas en forma paramétrica.

Ejemplo 1. Analizar la curva dada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\,\text{sen}^3 t. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Solución. Los valores x e y están determinados para todos los valores de t. Siendo periódicas las funciones $\cos^3 t$ y $\text{sen}^3 t$ de período 2π, será suficiente considerar la variación del parámetro t en los límites de 0 hasta 2π. El segmento $[-a, a]$ es el dominio de definición tanto para x como para y. Por consiguiente, la curva estudiada no tiene asíntotas. Hallemos ahora:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a\,\text{sen}^2 t\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Estas derivadas se reducen a cero, cuando $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Determinemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\,\text{sen}^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t} = -\text{tg}\,t. \tag{3'}$$

Tomando en consideración las fórmulas (2') y (3') componemos la tabla siguiente.

Campo de variación de t	Campo de variación correspondiente de x	Campo de variación correspondiente de y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Carácter de variación de y en función de x ($y = f(x)$)
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	$-$	Decrece
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	$+$	Crece
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	$-$	Decrece
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	$+$	Crece

De la tabla se deduce que las ecuaciones (1') definen dos funciones continuas del tipo $y = f(x)$; para $0 \leqslant t \leqslant \pi$ tenemos $y \geqslant 0$ (véanse dos primeros renglones de la tabla), para $\pi < t \leqslant 2\pi$ tenemos $y < 0$ (véanse los últimos renglones de la tabla). De la fórmula (3') se deduce:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

y

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

En estos puntos la tangente a la curva es vertical. Hallemos ahora:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

En estos puntos la tangente a la curva es horizontal. Calculemos ahora:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \operatorname{sen} t}.$$

De aquí se deduce:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

para $0 < t < \pi$, la curva es cóncava

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

para $\pi < t < 2\pi$ la curva es convexa.

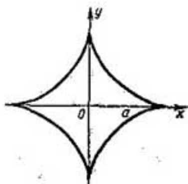


Fig. 134

Los resultados obtenidos permiten construir una curva correspondiente (fig. 134). Esta curva se llama *astroide*.

Ejemplo 2. Construir la curva dada por las ecuaciones (*folio de Descartes*)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \qquad (1'')$$

Solución. Estas dos funciones están definidas para todos los valores de t, a excepción de $t=-1$, además:

$$\lim_{t\to-1-0} x=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at}{1+t^3}=+\infty,\quad \lim_{t\to-1-0} y=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2}{1+t^3}=-\infty;$$

$$\lim_{t\to-1+0} x=-\infty,\quad \lim_{t\to-1+0} y=+\infty.$$

Observemos ahora que

para $t=0$ es $x=0,\ y=0,$

para $t\to+\infty$ es $x\to0,\ y\to0,$

para $t\to-\infty$ es $x\to0,\ y\to0.$

Hallemos $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{2''}$$

Para t obtenemos los siguientes valores críticos:

$$t_1=-1,\ t_2=0,\ t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Hallemos ahora:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \tag{3''}$$

Utilizando las fórmulas (1"), (2"), (3") componemos la tabla.

Campo de variación de t	Campo de variación correspondiente de x	Campo de variación correspondiente de y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Carácter de variación de y en función de x ($y=f(x)$)
$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>-\infty$	$-$	Decrece
$-1<t<0$	$-\infty<x<0$	$+\infty>y>0$	$-$	Decrece
$0<t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0<x<a\sqrt[3]{4}$	$0<y<a\sqrt[3]{2}$	$+$	Crece
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<t<\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}>x>a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}<y<a\sqrt[3]{4}$	$-$	Decrece
$\sqrt[3]{2}<t<+\infty$	$a\sqrt[3]{2}>x>+0$	$a\sqrt[3]{4}>y>0$	$+$	Crece

De la fórmula (3") se deduce:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\(x=0)\\(y=0)}}=0,\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\(x=0)\\(y=0)}}=\infty.$$

Por tanto, la curva pasa por el origen de coordenadas dos veces: una vez, con la tangente paralela al eje Ox y la otra, con la tangente paralela al eje Oy.

Ahora:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \left(\substack{x=a\sqrt[3]{4} \\ y=a\sqrt[3]{2}}\right)}} = \infty.$$

En este punto la tangente a la curva es vertical.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2} \\ \left(\substack{x=a\sqrt[3]{2} \\ y=a\sqrt[3]{4}}\right)}} = 0.$$

En este punto la tangente a la curva es horizontal. Busquemos la asíntota:

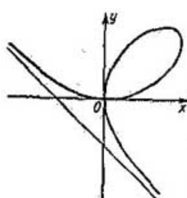


Fig. 135

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y-kx) = \lim_{x\to-1+0} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1)\frac{3at}{1+t^3}\right] =$$

$$= \lim_{t\to-1-0} \left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right] = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Por consiguiente la recta $y = -x - a$ es la asíntota de una rama de la curva para

$$x \to +\infty.$$

De igual manera hallemos:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y-kx) = -a.$$

Así, la recta $y = -x - a$ es la asíntota también de la rama de la curva para $x \to -\infty$.

Terminado el análisis podemos construir la curva (fig. 135).

Algunos problemas relacionados con el análisis de las curvas serán estudiados adicionalmente en el capítulo VIII, § 20. «Puntos singulares de una curva».

Ejercicios para el capítulo V

Hallar los extremos de las funciones: **1.** $y = x^2 - 2x + 3$. *Respuesta*: $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = 1$. **2.** $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}} = \frac{7}{2}$ para $x = 1$. **3.** $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. *Respuesta*: $y_{\text{máx}} = 10$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = -22$ para

$x=5$. 4. $y=-x^4+2x^2$. *Respuesta:* $y_{máx}=1$ para $x=\pm 1$, $y_{mín}=0$ para $x=0$. 5. $y=x^4-8x^2+2$. *Respuesta:* $y_{máx}=2$ para $x=0$, $y_{mín}=-14$ para $x=\pm 2$. 6. $y=3x^5-125x^3+2160x$. *Respuesta:* máx para $x=-4$ y $x=3$, mín para $x=-3$ y $x=4$. 7. $y=2-(x-1)^{2/3}$. *Respuesta:* $y_{máx}=2$ para $x=1$. 8. $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$. *Respuesta:* no hay máx ni mín. 9. $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. *Respuesta:* mín para $x=\sqrt{2}$, máx para $x=-\sqrt{2}$. 10. $y=\frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. *Respuesta:* máx para $x=\frac{12}{5}$. 11. $y=2e^x+e^{-x}$. *Respuesta:* mín para $x=-\frac{\ln 2}{2}$. 12. $y=\frac{x}{\ln x}$. *Respuesta:* $y_{mín}=e$ para $x=e$. 13. $y=\cos x+\operatorname{sen} x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. *Respuesta:* $y_{máx}=\sqrt{2}$ para $x=\frac{\pi}{4}$. 14. $y=\operatorname{sen} 2x-x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. *Respuesta:* máx para $x=\frac{\pi}{6}$, mín para $x=-\frac{\pi}{6}$. 15. $y=x+\operatorname{tg} x$. *Respuesta:* no hay máx, ni mín. 16. $y=e^x \operatorname{sen} x$. *Respuesta:* mín para $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$, máx para $x=2k\pi+\frac{3}{4}\pi$. 17. $y=x^4-2x^2+2$. *Respuesta:* máx para $x=0$; dos mínimos para $x=-1$ y $x=1$. 18. $y=(x-2)^3(2x+1)$. *Respuesta:* $y_{mín}\approx-8{,}24$ para $x=\frac{1}{8}$. 19. $y=x+\frac{1}{x}$ *Respuesta:* mín para $x=1$; máx para $x=-1$. 20. $y=x^2(a-x)^2$. *Respuesta:* $y_{máx}=\frac{a^4}{16}$ para $x=\frac{a}{2}$; $y_{mín}=0$ para $x=0$ y para $x=a$. 21. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$. *Respuesta:* máx para $x=\frac{a^2}{a-b}$; mín para $x=\frac{a^2}{a+b}$. 22. $y=x+\sqrt{1-x}$. *Respuesta:* $y_{máx}=\frac{5}{4}$ para $x=\frac{3}{4}$; $y_{mín}=-1$ para $x=-1$. 23. $y=x\sqrt{1-x}$ $(x\leqslant 1)$. *Respuesta:* $y_{máx}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ para $x=\frac{2}{3}$. 24. $y=\frac{x}{1+x^2}$. *Respuesta:* mín para $x=-1$, máx para $x=1$. 25. $y=x\ln x$. *Respuesta:* mín para $x=\frac{1}{e}$. 26. $y=x\ln^2 x$. *Respuesta:* máx para $x=e^{-\frac{1}{2}}$; mín para $x=1$. 27. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$. *Respuesta:* Función va creciendo. 28. $y=\operatorname{sen} 3x-3\operatorname{sen} x$. *Respuesta:* mín para $x=\frac{\pi}{2}$; máx para $x=\frac{3\pi}{2}$. 29. $y=2x+\operatorname{arctg} x$. *Respuesta:* no hay extremos. 30. $y=\operatorname{sen} x\cos^2 x$. *Respuesta:* mín para $x=\frac{\pi}{2}$; dos máximos: para $x=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ y para $x=\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. 31. $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ *Respuesta:* máx para $x=\frac{(4m+1)\pi}{2}$; mín para $x=\frac{(4m+3)\pi}{2}$.

Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones en los segmentos indicados:

32. $y=-3x^4+6x^2-1$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$. *Respuesta*: $y_{máx}=2$ para $x=\pm 1$, $y_{mín}=-25$ para $x=\pm 2$.

33. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ $(-1\leqslant x\leqslant 5)$. *Respuesta*: $y_{máx}=\frac{23}{3}$ para $x=5$, $y_{mín}=-\frac{13}{3}$ para $x=-1$.

34. $y=\frac{x-1}{x+1}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$. *Respuesta*: $y_{máx}={}^3/_5$ para $x=4$, $y_{mín}=-1$ para $x=0$. 35. $y=\operatorname{sen} 2x-x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. *Respuesta*: $y_{máx}=\frac{\pi}{2}$ para $x=-\frac{\pi}{2}$, $y_{mín}=-\frac{\pi}{2}$ para $x=\frac{\pi}{2}$.

36. Con una hojalata cuadrada de lado a es preciso hacer un cajón abierto por arriba que tenga el volumen máximo. Se recortan cuadrados en los ángulos de la hojalata y se dobla ésta para formar el cajón. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

Respuesta: $a/6$.

37. Demostrar que de todos los rectángulos que puedan inscribirse en un círculo dado el cuadrado tiene el área máxima. Demostrar que el cuadrado tendrá también el perímetro máximo.

38. Demostrar que de todos los triángulos isósceles inscritos en un círculo dado un triángulo equilátero tendrá el perímetro máximo.

39. Hallar un triángulo rectangular del área máxima cuya hipotenusa es h. *Respuesta*: la longitud de cada cateto es igual a $h/\sqrt{2}$.

40. Hallar la altura de un cilindro recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

Respuesta: la altura es igual a $2R/\sqrt{3}$.

41. Hallar la altura de un cilindro recto que tenga la superficie lateral máxima, inscrito en una esfera de radio R. *Respuesta*: la altura es igual a $R\sqrt{2}$.

42. Hallar la altura de un cono recto de volumen mínimo, circunscrito alrededor de una esfera de radio R. *Respuesta*: la altura es igual a $4R$ (el volumen del cono es igual a dos volúmenes de la esfera).

43. El interior de un recipiente con el fondo cuadrado y abierto por arriba debe revestirse con plomo. Si el volumen del recipiente es igual a 32 lit, ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que sea mínima la cantidad de plomo?

Respuesta: la altura es 0,2 m; el lado de la base es 0,4 m (es decir, el lado de la base debe ser dos veces mayor que la altura).

44. Un techador quiere fabricar un canalón abierto de capacidad máxima. El fondo y los costados del canalón deben ser de 10 cm de ancho, además los costados han de estar igualmente inclinados respecto al fondo. ¿Cuál debe ser la anchura del canalón por arriba?

Respuesta: 20 cm.

45. Demostrar que un pabellón cónico de capacidad dada requiere una cantidad mínima de tela cuando su altura es $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

46. Hace falta fabricar un cilindro abierto por arriba, cuyas paredes y el fondo tengan un espesor dado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del cilindro para que, dada la capacidad, sea mínima la cantidad de material utilizado?

Respuesta: Si R es el radio interior de la base y v, el volumen interior del cilindro, entonces: $R=\sqrt[3]{v/\pi}$.

47. Es preciso fabricar una caldera, compuesta de un cilindro y dos fondos semiesféricos, con paredes de espesor constante, de modo que con el volumen dado v tenga una superficie exterior mínima.

Respuesta: la caldera debe tener la forma de una esfera con radio interior R, igual a $\sqrt[3]{3v/4\pi}$.

48. Construir un trapecio isósceles que, dada el área S, tenga un perímetro mínimo; el ángulo en la base del trapecio es α. *Respuesta*: el largo del lado lateral es igual a $\sqrt{S/\operatorname{sen}\alpha}$.

49. Inscribir en una esfera de radio R un prisma triangular regular de volumen máximo.

Respuesta: la altura del prisma es igual a $2R/\sqrt{3}$.

50. Circunscribir alrededor de una semiesfera de radio R un cono de volumen mínimo; el plano de la base del cono coincide con el de la base de la semiesfera; hallar la altura del cono.

Respuesta: la altura del cono es igual a $R\sqrt{3}$.

51. Circunscribir alrededor de un cilindro de radio r un cono recto de volumen mínimo; suponiendo que coinciden los planos y los centros de las bases circulares del cilindro y del cono. *Respuesta*: el radio de la base del cono es igual a $\frac{3r}{2}$.

52. Cortar un segmento de una hoja circular de radio R. Este segmento debe ser tal que al enrollarlo se obtenga un embudo de capacidad máxima.

Respuesta: el ángulo central del segmento es igual a $2\pi\sqrt{2/3}$.

53. Hallar el cilindro del volumen máximo entre todos los cilindros redondos inscritos en un cubo dado con arista a de tal modo que sus ejes coincidan con la diagonal del cubo y las circunferencias de las bases toquen las caras del mismo. *Respuesta*: la altura del cilindro es igual a $a\sqrt{3}/3$, el radio de la base es igual a $a/\sqrt{6}$.

54. Sea dado un punto (x_0, y_0) que se halla en el primer cuadrante en el sistema rectangular de coordenadas. Trazar por este punto una recta, de manera que forme un triángulo de área mínima con las direcciones positivas de los ejes de coordenadas.

Respuesta: la recta corta en los ejes los segmentos: $2x_0$ y $2y_0$, es decir, tiene la ecuación $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$.

55. Sea dado un punto, en el eje de la parábola $y^2=2px$ a la distancia a del vértice. Hallar la abscisa del punto de la curva más próximo al punto dado.

Respuesta: $x=a-p$.

56. La solidez de una barra de sección rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cubo de altura. Hallar el ancho de la barra de máxima solidez que podría ser cortada de un tronco de madera de 16 cm de diámetro.

Respuesta: la anchura es igual a 8 cm.

57. Un torpedero se encuentra anclado a 9 km del punto más próximo de la costa. Es preciso enviar un mensajero a un campamento militar situado a 15 km del punto de la tierra más próximo al torpedero, contando a lo largo de la costa; el mensajero, andando a pie hace 5 km/hora y remando, 4 km/hora.

¿En qué punto de la costa debe desembarcarse el mensajero para llegar al campamento en el tiempo mínimo posible?

Respuesta: A 3 km del campamento.

58. Un punto se desplaza por un plano en un medio, dispuesto fuera de la línea MN, a la velocidad v_1 y por la línea MN, con la v_2.

¿Que camino debe pasar el punto para desplazarse de la posición A a la B, situada en la línea MN, en un tiempo mínimo? La distancia entre el punto

A y la línea MN es igual a h; la distacia entre la proyección α del punto A sobre la línea MN, y el punto B es igual a a.

Respuesta: Si ACB es el trayecto del punto, tenemos:

$$\frac{\alpha C}{AC}=\frac{v_1}{v_2} \text{ cuando } \frac{\alpha B}{AB}\geqslant\frac{v_1}{v_2}, \text{ y } \alpha C=\alpha B, \text{ cuando } \frac{\alpha B}{AB}<\frac{v_1}{v_2}.$$

59. Una carga w se eleva mediante una palanca, siendo F la fuerza aplicadá a un extremo de ésta; el punto de apoyo se encuentra en el otro extremo de la misma. Si la carga está colgada en el punto que se halla a la distancia a cm del de apoyo y cada centímetro lineal de la palanca pesa v gramos ¿cuál debe ser la longitud de la palanca para que la fuerza necesaria para elevar la carga sea mínima?

Respuesta: $x=\sqrt{2a\,w/v}$ *cm*.

60. Realizadas n mediciones de una magnitud incógnita x, se han obtenido las lecturas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Demostrar que la suma de los cuadrados de los errores $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2$ será la mínima, si se toma por x el número $(x_1+x_2+\ldots x_n)/n$.

61. Para disminuir cuanto sea posible la fricción del líquido contra las paredes de un canal, el área mojada por el agua debe ser mínima. Demostrar que la mejor forma del canal rectangular abierto de área dada de sección transversal, es aquélla en que el ancho del canal es dos veces mayor que su altura.

Hallar los puntos de inflexión, los intervalos de convexidad y concavidad de las curvas.

62. $y=x^5$. *Respuesta*: para $x<0$, la curva es convexa, es cóncava para $x>0$; hay punto de inflexión para $x=0$.

63. $y=1-x^2$. *Respuesta*: La curva es convexa en todos los puntos.

64. $y=x^3-3x^2-9x+9$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=1$.

65. $y=(x-b)^5$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=b$.

66. $y=x^4$. *Respuesta*: la curva es cóncava en todos los puntos.

67. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

68. $y=\operatorname{tg}x$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=n\pi$.

69. $y=xe^{-x}$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=2$.

70. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$. *Respuesta*: hay punto de inflexión para $x=b$.

71. $y=a-\sqrt[3]{(x-b)^2}$. *Respuesta*: la curva no tiene el punto de inflexión.

Hallar las asíntotas de las curvas siguientes:

72. $y=\dfrac{1}{x-1}$. *Respuesta*: $x=1$; $y=0$. 73. $y=\dfrac{1}{(x+2)^3}$. *Respuesta*: $x=-2$; $y=0$. 74. $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$. *Respuesta*: $x=b$, $y=c$. 75. $y=e^{\frac{1}{x}}-1$. *Respuesta*: $x=0$; $y=0$. 76. $y=\ln x$. *Respuesta*: $x=0$. 77. $y^3=6x^2+x^3$. *Respuesta*: $y=x+2$. 78. $y^3=a^3-x^3$. *Respuesta*: $y+x=0$. 79. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$. *Respuesta*: $x=2a$. 80. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$. *Respuesta*: $x=2a$, $y=\pm(x+a)$.

Analizar las funciones y construir sus gráficas:

81. $y=x^4-2x+10$. 82. $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$. 83. $y=e^{-\frac{1}{x}}$. 84. $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$. 85. $y=\dfrac{4+x}{x^2}$. 86. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. 87. $y=\dfrac{x+2}{x^3}$. 88. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$. 89. $y^2=x^3-x$. 90. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$. 91. $y=\sqrt[3]{x^2}+2$. 92. $y=x-\sqrt[3]{x^3+1}$. 93. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. 94. $y=xe^{-x}$.

95. $y=x^2e^{-x^2}$. 96. $y=x-\ln(x+1)$. 97. $y=\ln(x^2+1)$. 98. $y=\operatorname{sen} 3x$. 99. $y=x+\operatorname{sen} x$. 100. $y=x\operatorname{sen} x$. 101. $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$. 102. $y=\ln\operatorname{sen} x$. 103. $y=\frac{\ln x}{x}$. 104. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{1}{2}t. \end{cases}$ 105. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$ 106. $\begin{cases} x=a(t-\operatorname{sen} t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

107. $\begin{cases} x=ae^t\cos t, \\ y=ae^t\operatorname{sen} t. \end{cases}$

Problemas complementarios

Hallar las asíntotas de las líneas:

108. $y=\frac{x^2+1}{1+x}$. *Respuesta:* $x=-1$; $y=x-1$. 109. $y=x+e^{-x}$. *Respuesta:* $y=x$. 110. $2y(x+1)^2=x^3$. *Respuesta:* $x=-1$; $y=\frac{1}{2}x-1$. 111. $y^3=a^3-x^3$. *Respuesta:* $x+y=0$. 112. $y=e^{-2x}\operatorname{sen} x$. *Respuesta:* $y=0$. 113. $y=e^{-x}\operatorname{sen} 2x+x$. *Respuesta:* $y=x$. 114. $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$. *Respuesta:* $x=-\frac{1}{e}$; $y=x+\frac{1}{e}$.

115. $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$. *Respuesta:* $x=0$, $y=x$. 116. $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$. *Respuesta:* $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Estúdiense las funciones y constrúyanse sus gráficas:

117. $y=|x|$. 118. $y=\ln|x|$. 119. $y^2=x^3-x$. 120. $y=(x+1)^2(x-2)$. 121. $y=x+|x|$. 122. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$. 123. $y=x^2\sqrt{x+1}$. 124. $y=\frac{x^2}{2}-\ln x$. 125. $y=\frac{x^2}{2}\ln x$. 126. $y=\frac{1}{e^x-1}$. 127. $y=\frac{x}{\ln x}$. 128. $y=x+\frac{\ln x}{x}$. 129. $y=x\ln x$.

130. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. 131. $y=|\operatorname{sen} 3x|$. 132. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 133. $y=x\operatorname{arctg} x$. 134. $y=x-2\operatorname{arctg} x$. 135. $y=e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$. 136. $y=|\operatorname{sen} x|+x$. 137. $y=\operatorname{sen}(x^2)$. 138. $y=\cos^3 x+\operatorname{sen}^3 x$. 139. $y=\frac{x+|x|}{2}$. 140. $y=\frac{x-|x|}{2}$. 141. $y=\operatorname{sen}\left(\frac{x+|x|}{2}\right)-\frac{x-|x|}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$. 142. $y=\cos\left(\frac{x-|x|}{2}\right)-\frac{x+|x|}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$. 143. $y=\frac{1}{2}(3x+|x|)+1$. 144. $y=\frac{1}{2}[3(x-1)+|x-1|]+1$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

CAPITULO VI

CURVATURA DE UNA CURVA

§ 1. LONGITUD DEL ARCO Y SU DERIVADA

Supongamos que un arco de la curva M_0M (fig. 136) sea la gráfica de la función $y = f(x)$, definida en el intervalo (a, b). Determinemos la longitud del arco de la curva. Tomemos en la curva AB los puntos M_0, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ... M_{n-1}, M. Uniendo con rectas los puntos tomados, obtenemos una línea quebrada

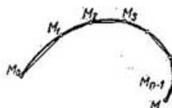


Fig. 136

$M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M$, inscrita en el arco M_0M. Designemos por P_n la longitud de esta línea quebrada.

El límite (lo indiquemos con s), al cual tiende la longitud de la línea quebrada cuando tiende a cero la longitud del segmento más grande $M_{i-1}M_i$ se llama la *longitud del arco* M_0M, si este límite existe y no depende de la elección de los puntos en la línea quebrada $M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M$. Observamos que la definición de la longitud del arco de una curva arbitraria es análoga a la de longitud de una circunferencia.

En el capítulo XII demostraremos que, si en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas el arco de la curva $y = f(x)$, comprendido entre los puntos $[a; f(a)]$ y $[b; f(b)]$, tiene una longitud bien determinada. En el mismo capítulo se demostrará el modo de calcular esta longitud. También será establecido (como corolario) que en las condiciones dadas la razón de la longitud de cualquier arco de esta curva a la longitud de la cuerda respectiva

tiende a 1, cuando la longitud de cuerda tiende a 0:

$$\lim_{M_0M\to 0}\frac{\text{long. }\widehat{M_0M}}{\text{long. }\overline{M_0M}}=1.$$

Este teorema puede ser fácilmente comprobado para la circunferencia*, sin embargo, en el caso general, lo tomaremos ahora sin demostración.

Estudiemos el problema siguiente. Sea $y=f(x)$ la ecuación de una curva en un plano.

Sea $M_0(x_0, y_0)$ un punto fijo de la curva, y $M(x, y)$, un punto desplazable de la misma. Designemos por s la longitud del arco M_0M (fig. 138).

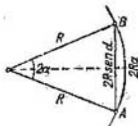


Fig. 137

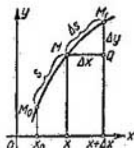


Fig. 138

Al variar la abscisa x del punto M varía también la longitud s del arco, es decir, s es una función de x. Calculemos la derivada s con respecto a x.

Daremos a x un incremento Δx. Entonces el arco s recibirá un incremento $\Delta x=\text{long. }\widehat{MM_1}$. Sea $\overline{MM_1}$ la cuerda de este arco. Para determinar $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}$, procedamos de la manera siguiente: del triángulo ΔMM_1Q encontramos:

$$\overline{MM_1^2}\,(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

Multipliquemos y dividamos por Δs^2 el primer miembro:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\Delta s^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

*) Consideremos el arco AB, cuyo ángulo central es igual a 2α (fig. 137). La longitud de este arco es igual a $2R\alpha$ (R es el radio de la circunferencia) y la de su cuerda es igual a $2R$ sen α. Por eso:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\text{long. }\widehat{AB}}{\text{long. }\overline{AB}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2R\alpha}{2R\operatorname{sen}\alpha}=1.$$

Dividamos por Δx^2 todos los términos de la igualdad:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Encontremos los límites de los miembros primero y segundo cuando $\Delta x\to 0$. Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{\overline{MM}_1\to 0}\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}=1$ y $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$, obtenemos: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
o sea

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (1)$$

Obtenemos la siguiente expresión para la diferencial de un arco:

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (2)$$

o bien*

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}. \qquad (2')$$

Hemos obtenido la expresión de la diferencial de la longitud de un arco cuando la curva se da por la ecuación $y=f(x)$. Sin embargo, la fórmula (2′) es válida también cuando la curva se representa mediante ecuaciones paramétricas.

Si las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

entonces:

$$dx=\varphi'(t)\,dt,\quad dy=\psi'(t)\,dt,$$

y la expresión (2′) toma la forma $ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$.

§ 2. CURVATURA

Uno de los elementos que caracterizan la forma de una curva es el grado de su curvatura. Supongamos que existe una curva que no se corta y tiene una tangente bien determinada en cada uno de sus puntos. Tracemos las tangentes a la curva en dos puntos arbitrarios A y B, y designemos por α el ángulo formado por estas tangentes

*) Razonando estrictamente, la fórmula (2′) es válida sólo cuando $dx>0$. Si $dx<0$, entonces $dx=-\sqrt{dx^2+dy^2}$. Por eso, en general, será más justo escribir esta fórmula del modo siguiente: $|ds|=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

o (con mayor exactitud), el ángulo de giro de la tangente cuando ésta pasa del punto A al punto B (fig. 139). Este ángulo se llama *ángulo de contingencia* del arco AB. De los dos arcos de una misma longitud, será el más encorvado el que tiene mayor ángulo de contingencia (fig. 139, 140).

Por otra parte, es evidente que no se puede determinar el grado de curvatura de los arcos de diferente longitud considerando sólo

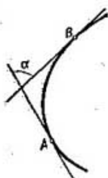


Fig. 139

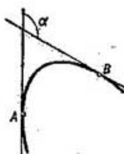


Fig. 140

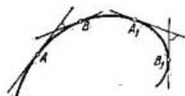


Fig. 141

sus ángulos de contingencia. Por consiguiente, la característica completa de la curvatura de una curva será la razón del ángulo de contingencia a la longitud del arco correspondiente.

Definición 1. La razón del ángulo de contingencia correspondiente α respecto a la longitud del arco se llama *curvatura media* K_{med} *del arco* $\widehat{AB}$: $K_{med}=\frac{\alpha}{\widehat{AB}}$.

La curvatura media de diferentes arcos (partes) de una curva puede ser diferente. Así, por ejemplo, la curvatura media de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{A_1B_1}$ de la curva expuesta en la figura 141 es diferente, aunque las longitudes de estos arcos son iguales. Mas aún su grado de curvatura varía de un punto al otro. Para caracterizar el grado de curvatura de la curva dada en la proximidad inmediata del punto A, introduzcamos la noción de curvatura de la curva en el punto dado.

Definición 2. El límite de la curvatura media del arco $\widehat{AB}$, cuando la longitud del mismo tiende a cero (es decir, cuando el punto B se aproxima* al punto A) se llama *curvatura* K_A de la curva en el punto dado A:

$$K_A=\lim_{B\to A} K_{med}=\lim_{AB\to 0}\frac{\alpha}{\widehat{AB}}.$$

*) Se supone que el valor del límite no depende de la dirección en que se toma en la curva el punto desplazable B respecto al punto A.

Ejemplo. Para una circunferencia de radio r: 1) determinar la curvatura media del arco $\widehat{AB}$, correspondiente al ángulo central α (fig. 142); 2) determinar la curvatura en el punto A.

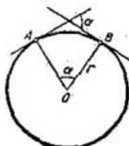


Fig. 142

Solución: 1) Es evidente que el ángulo de contingencia del arco $\widehat{AB}$ es igual a α y la longitud del arco es igual a αr. Por tanto:

$$K_{\text{med}} = \frac{\alpha}{\alpha \cdot r}$$

o sea

$$K_{\text{med}} = \frac{1}{r}.$$

2) La curvatura en el punto A es igual a

$$K = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Así pues, la curvatura media del arco de una circunferencia de radio r no depende de la longitud y posición del arco; para todos los arcos es igual a $\frac{1}{r}$. La curvatura de la circunferencia en un punto cualquiera tampoco depende de la posición del punto y es igual a $\frac{1}{r}$.

Observación. Notemos que la curvatura de una curva arbitraria puede, generalmente, variar de un punto al otro, como lo veremos más abajo.

§ 3. CALCULO DE LA CURVATURA

Deduzcamos la fórmula para calcular la curvatura de una curva en cada uno de sus puntos $M(x, y)$. Supongamos que la curva está dada en el sistema de coordenadas rectangulares por la ecuación:

$$y = f(x), \tag{1}$$

y que la función $f(x)$ tiene la segunda derivada continua.

Tracemos las tangentes a la curva en los puntos M y M_1, cuyas abscisas son x y $x + \Delta x$, respectivamente, y designemos con φ y $\varphi + \Delta\varphi$ los ángulos formados por estas tangentes y el eje Ox (fig. 143).

Designemos por s la longitud del arco $\widehat{M_0M}$, calculado a partir de un punto dado M_0. Entonces $\Delta s = \widehat{M_0M_1} - \widehat{M_0M}$ y $|\Delta s| = \widehat{MM_1}$.

Como se ve en la figura 143, el ángulo de contingencia que corresponde al arco $\widehat{MM_1}$ es igual al valor absoluto* de la diferencia entre los ángulos φ y $\varphi + \Delta\varphi$, es decir, es igual a $|\Delta\varphi|$.

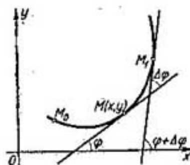


Fig. 143

Conforme a la definición de la curvatura media de una curva en el segmento MM_1, tenemos:

$$K_{\text{méd}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Para determinar la *curvatura en el punto M* es preciso hallar el límite de esta expresión cuando la longitud del arco $\widehat{MM_1}$ tiende a cero:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Puesto que φ y s dependen de x (son funciones de x), entonces, φ se puede considerar como una función de s y suponer que esta función se ha dado por las ecuaciones paramétricas mediante el parámetro x. En este caso:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

y, por tanto,

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \tag{2}$$

*) Es evidente que para la curva dada en la figura 143 $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$, puesto que $\Delta\varphi > 0$.

Para calcular $\frac{d\varphi}{ds}$ utilicemos la fórmula de derivación de funciones paramétricas:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

Para expresar la derivada $\frac{d\varphi}{dx}$ a través de la función $y=f(x)$, observemos que $\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}$ y, por tanto,

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}.$$

Derivando la última igualdad con respecto a x tenemos:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Para la derivada $\frac{ds}{dx}$, hemos encontrado en el § 1, cap. VI,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

De donde

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

y, dado $K=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, obtenemos en definitiva:

$$K=\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \qquad (3)$$

Por consiguiente, en cualquier punto de la curva, donde existe y es continua la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ se puede calcular la curvatura, utilizando la fórmula (3). Observemos que calculando la curvatura de una curva, conviene tomar sólo el valor aritmético (positivo) de la raíz en el denominador puesto que, según la definición, la curvatura de una curva no puede ser negativa.

Ejemplo 1. Determinar la curvatura de la parábola $y^2 = 2px$:
a) en un punto arbitrario $M(x, y)$;
b) en el punto $M_1(O, O)$;
c) en el punto $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Solución. Hallar las derivadas primera y segunda de la función $y = \sqrt{2px}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Poniendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3), obtenemos:

a) $K = \frac{p^2}{(2px + p^2)^{3/2}}$;

b) $K_{x=0,\ y=0} = \frac{1}{p}$;

c) $K_{x=\frac{p}{2},\ y=p} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}$.

Ejemplo 2. Determinar la curvatura de la recta $y = ax + b$ en un punto arbitrario (x, y).

Solución.

$$y' = a, \quad y'' = 0.$$

En virtud de la fórmula (3), obtenemos:

$$K = 0.$$

Así la recta es una curva de «curvatura cero». El mismo resultado se puede sacar inmediatamente de la definición de curvatura.

§ 4. CALCULO DE LA CURVATURA DE UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMETRICA

Sea una curva dada en forma paramétrica:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Entonces (§ 24, cap. III):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3) del párrafo antecedente, tenemos:

$$K=\frac{|\psi''\varphi'-\psi'\varphi''|}{[\varphi'^2+\psi'^2]^{3/2}}. \qquad (1)$$

Ejemplo: Determinar la curvatura de la cicloide

$$x=a(t-\operatorname{sen} t), \quad y=a(1-\cos t)$$

en un punto arbitrario (x, y).

Solución

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2}=a\operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt}=a\operatorname{sen} t, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3), obtenemos:

$$K=\frac{|a(1-\cos t)\,a\cos t-a\operatorname{sen} t\cdot a\operatorname{sen} t|}{[a^2(1-\cos t)^2+a^2\operatorname{sen}^2 t]^{3/2}}=\frac{|\cos t-1|}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{3/2}(1-\cos t)^{1/2}}=\frac{1}{4a\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|}.$$

§ 5. CALCULO DE LA CURVATURA DE UN CURVA DADA EN COORDENADAS POLARES

Sea la curva dada por la ecuación del tipo

$$\rho=f(\theta). \qquad (1)$$

Escribamos las fórmulas de paso de las coordenadas polares a las de Descartes:

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta,\\ y&=\rho\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Si en estas fórmulas sustituimos ρ por su expresión en función de θ, es decir, por $f(\theta)$, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x&=f(\theta)\cos\theta,\\ y&=f(\theta)\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la curva (1), en las cuales θ sirve de parámetro.

Entonces:

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta-\rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\operatorname{sen}\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Introduciendo las últimas expresiones en la fórmula (1) del párrafo anterior, obtenemos la fórmula para calcular la curvatura de una curva en coordenadas polares:

$$K=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Ejemplo. Determinar la curvatura de la espiral de Arquímedes

$$\rho=a\theta\ (a>0)$$

en un punto arbitrario (fig. 144).

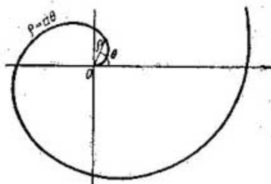


Fig. 144

Solución.

$$\frac{d\rho}{d\theta}=a;\quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=0.$$

Por tanto,

$$K=\frac{|a^2\theta^2+2a^2|}{(a^2\theta^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a}\,\frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)^{3/2}}.$$

Observemos que para valores grandes de θ se cumplen las ecuaciones aproximadas:

$$\frac{\theta^2+2}{\theta^2}\approx 1,\quad \frac{\theta^2+1}{\theta^2}\approx 1.$$

Por eso, sustituyendo en la fórmula antecedente, θ^2+2 por θ^2, y θ^2+1 por θ^2, obtenemos la fórmula aproximada (para valores grandes de θ):

$$K\approx\frac{1}{a}\,\frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}}=\frac{1}{a\theta}.$$

De este modo, la espiral de Arquímedes para valores grandes de θ, tiene aproximadamente la misma curvatura que una circunferencia de radio $a\theta$.

§ 6. RADIO Y CIRCULO DE CURVATURA. CENTRO DE CURVATURA. EVOLUTA Y EVOLVENTE

Definición. La magnitud R, recíproca a la curvatura K de una curva en un punto dado M, se denomina *radio de curvatura* de la curva en este punto de que se trata:

$$R = \frac{1}{K}, \tag{1}$$

o sea,

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \tag{2}$$

Tracemos por el punto M de la curva (fig. 145) la normal dirigida hacia la concavidad de aquella y marquemos en esta normal un segmento MC igual al radio R de curvatura de la curva en el punto M.

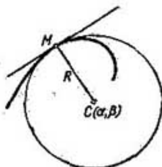


Fig. 145

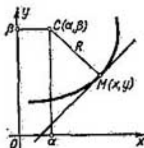


Fig. 146

El punto C se llama *centro de curvatura* de esta curva en el punto M; el círculo de radio R y centro en el punto C (que pasa por el punto M), se denomina *círculo de curvatura* de la curva dada en el punto M.

De la definición de círculo de curvatura se deduce que en el punto dado la curvatura de la curva es igual a la del círculo de curvatura.

Obtengamos las fórmulas que determinan las coordenadas del centro de curvatura.

Sea una curva dada por la ecuación

$$y = f(x), \tag{3}$$

fijemos en la curva un punto $M(x, y)$ y determinemos las coordenadas α y β del centro de curvatura correspondiente al punto elegido

(fig. 146). Escribamos la ecuación de la normal a la curva en el punto M:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \tag{4}$$

(Aquí, X e Y son coordenadas corrientes de un punto de la normal).

Puesto que el punto C $(\alpha,\ \beta)$ está situado en la normal, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (4):

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \tag{5}$$

Luego, la distancia entre el punto C $(\alpha,\ \beta)$ y el M $(x,\ y)$ es igual al radio R de curvatura:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \tag{6}$$

Resolviendo juntamente las ecuaciones (5) y (6), hallamos α y β:

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x)^2 = R^2,$$

$$(\alpha - x)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2}R^2;$$

de donde: $\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}R$, $\beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}R$, y, dado que: $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, tenemos: $\alpha = x \pm \frac{y'(+y'^2)}{|y''|}$, $\beta = y \mp \frac{1+y'^2}{|y''|}$.

Para decidir qué signos (superiores o inferiores) debemos tomar en las últimas fórmulas, conviene examinar el caso: $y'' > 0$ y $y'' < 0$. Si $y'' > 0$, la curva es cóncava en este punto y, por tanto, $\beta > y$ (fig. 146), por consiguiente, debemos tomar los signos inferiores. Tomando en cuenta que en este caso $|y''| = y''$, las fórmulas de las coordenadas del centro de curvatura serán:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

De modo análogo se puede demostrar que las fórmulas (7) se verifican también en el caso de $y'' < 0$.

Si la curva está dada por ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

las coordenadas del centro de curvatura se obtienen con facilidad de las fórmulas (7), sustituyendo en éstas y' e y'' por sus expresiones en función del parámetro:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}.$$

Entonces,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la parábola

$$y^2 = 2px$$

a) en un punto arbitrario $M(x, y)$; b) en el punto $M_0(0, 0)$; c) en el punto $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Solución. Introduciendo los valores de $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en las fórmulas (7), tenemos (fig. 147):

a) $\alpha = 3x + p$, $\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$;

b) para $x = 0$ encontramos: $\alpha = p$, $\beta = 0$;

c) para $x = \frac{p}{2}$ tenemos: $\alpha = \frac{5p}{2}$, $\beta = -p$.

Si la curvatura en el punto $M_1(x, y)$ no es igual a cero, al punto mencionado le corresponde un centro de curvatura bien determinado: $C_1(\alpha, \beta)$. El conjunto de todos los centros de curvatura de la curva dada forma una curva nueva, llamada *evoluta* de la curva estudiada.

De este modo, el lugar geométrico de los centros de curvatura se llama *evoluta de la curva*. La curva estudiada, con relación a su evoluta, se llama *evolvente* o *involuta* (o *desarrollo*).

Si la curva dada está representada por la ecuación $y = f(x)$, entonces las ecuaciones (7) se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la evoluta con el parámetro x. Eliminando en las ecuaciones dadas el parámetro x (si es posible), obtenemos la expresión de la dependencia directa entre las coordenadas corrientes

α y β de la evoluta. Si la curva está representada por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, las ecuaciones (7') serán ecuaciones

Fig. 147

Fig. 148

paramétricas de la evoluta (puesto que los valores x, y, x', y', x'', y'' son funciones de t).

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la evoluta de la parábola

$$y^2 = 2px.$$

Solución. Utilizando los resultados del ejemplo 1, tenemos para cada punto (x, y) de la parábola:

$$\alpha = 3x + p,$$

$$\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Eliminando en estas ecuaciones el parámetro x, obtenemos:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Esta es la ecuación de la parábola semicúbica (fig. 148).

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la evoluta de una elipse dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$$

Solución. Calculamos las derivadas de x e y con respecto a t:

$$x' = -a \operatorname{sen} t, \quad y' = b\cos t;$$

$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b \operatorname{sen} t.$$

Poniendo las expresiones de las derivadas en las fórmulas (7') tenemos:

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t\,(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab\operatorname{sen}^2 t + ab\cos^2 t} =$$

$$= a\cos t - a\cos t\operatorname{sen}^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Así, pues,

$$\alpha=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

De modo análogo:

$$\beta=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\operatorname{sen}^3 t.$$

Eliminando el parámetro t, obtenemos la ecuación de la evoluta de la elipse:

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3}=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

Aquí, α y β son coordenadas corrientes de la evoluta (fig. 149).

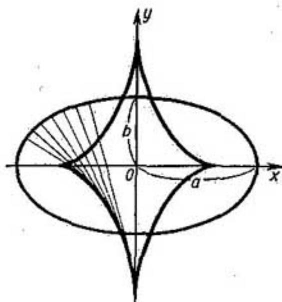


Fig. 149

Ejemplo 4. Hallar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de una cicloide:

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),$$
$$y=a(1-\cos t).$$

Solución.

$$x'=a(1-\cos t);\quad y'=a\operatorname{sen} t;$$
$$x''=a\operatorname{sen} t;\quad y''=-a\cos t.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (7') tenemos

$$\alpha=a(t+\operatorname{sen} t),$$
$$\beta=-a(1-\cos t).$$

Transformemos las variables, haciendo:

$$\alpha=\xi-\pi a,$$
$$\beta=\eta-2a,$$
$$t=\tau-\pi.$$

Las ecuaciones de la evoluta tomarán la forma:

$$\xi = a(\tau - \operatorname{sen} \tau),$$

$$\eta = a(1 - \cos \tau).$$

Estas últimas determinan en las coordenadas ξ, η una cicloide generada por el mismo círculo de radio a. De este modo, la evoluta de una cicloide es la misma cicloide, pero desplazada en $-\pi a$ por el eje Ox y en $-2a$, por el eje Oy (fig. 150).

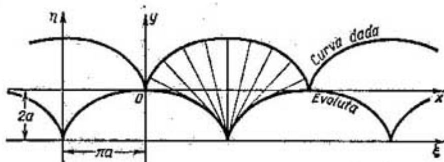


Fig. 150

§ 7. PROPIEDADES DE LA EVOLUTA

Teorema 1. *La normal a la curva dada es tangente a su evoluta.*

Demostración. El coeficiente angular de la tangente a la evoluta, determinada por las ecuaciones paramétricas (7′) del párrafo antecedente, es igual a:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}.$$

Notemos que [en virtud de las mismas ecuaciones (7′)]

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y''^2y'^2 - y'y''' - y'^3y'''}{y''^2} = -y'\frac{3y'y'' - y''' - y'^2y'''}{y''^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{3y''y' - y''' - y'^2y'''}{y''^2}, \quad (2)$$

de donde obtenemos la correlación:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}.$$

Pero y' es el coeficiente angular de la tangente a la curva en el punto correspondiente; por tanto, de la correlación obtenida se deduce que la tangente a la curva es perpendicular a la tangente

a la evoluta de esta curva en el punto correspondiente, es decir, la normal a la curva es tangente a la evoluta de esta curva.

Teorema 2. *Si el radio de curvatura varía uniformemente sobre cierto segmento M_1M_2 de la curva (es decir, sólo crece o sólo decrece), el incremento de la longitud del arco de la evoluta en este segmento de la curva es igual (en valor absoluto) al incremento correspondiente del radio de curvatura de esta curva.*

Demostración. En virtud de la fórmula (2') § 1 cap. VI, tenemos:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

donde, ds es la diferencial de la longitud del arco de la evoluta; de aquí se tiene: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2$.

Introduciendo en esta ecuación las expresiones (1) y (2), tenemos:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) = \left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \qquad (3)$$

Hallemos ahora $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$. Puesto que

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \text{se tiene} \quad R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}.$$

Derivando ambos miembros de esta igualdad con respecto a x y realizando las transformaciones correspondientes, obtenemos: $2R\frac{dR}{dx} = \frac{2(1 + y'^2)^2(3y'y''^2 - y''' - y'^2 - y''')}{(y'')^3}$. Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $2R = \frac{2(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, obtenemos: $\frac{dR}{dx} = \frac{(1 + y'^2)^{1/2}(3y'y''^2 - y''' - y'^2y''')}{y''^2}$.

Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2)\left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \qquad (4)$$

Comparando las ecuaciones (3) y (4):

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

de donde

$$\frac{dR}{dx} = \mp \frac{ds}{dx}.$$

Según la hipótesis, $\frac{dR}{dx}$ no cambia de signo (R sólo crece, o decrece), por consiguiente, $\frac{ds}{dx}$ conserva su signo. Tomemos (para mayor precisión del razonamiento): $\frac{dR}{dx} \leqslant 0$, $\frac{ds}{dx} \geqslant 0$ (lo que corresponde a la fig. 151). Por consiguiente, $\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$. Sean x_1 y x_2 las abscisas de los puntos M_1 y M_2. Apliquemos el teorema de Cauchy para las funciones $s(x)$ y $R(x)$ en el segmento $[x_1, x_2]$:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}} = -1,$$

donde, ξ es un número comprendido entre x_1 y x_2 ($x_1 < \xi < x_2$).

Introduzcamos las siguientes designaciones (fig. 151):

$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1.$$

Entonces, $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$, ó $s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1)$. Esto significa que

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

De la misma manera se demuestra esta ecuación cuando el radio de curvatura crece.

Hemos demostrado los teoremas 1 y 2 para el caso de la curva dada por una ecuación explícita $y = f(x)$. Estos teoremas son válidos también cuando la curva está dada por ecuaciones paramétricas. Su demostración es absolutamente análoga.

Observación. Mostremos un procedimiento mecánico elemental para construir la curva (evolvente) siguiendo su evoluta.

Sea una regla flexible encorvada en forma de la evoluta C_0C_5 (fig. 152). Imaginemos un hilo inextensible que contornea esta regla y uno de los extremos del hilo está fijado en el punto C_0. Si desenrollamos este hilo, manteniéndolo siempre bien tenso, su otro extremo describirá una curva M_5M_0, que será la evolvente.

La comprobación de que la curva obtenida es realmente una evolvente puede ser realizada con ayuda de las propiedades de la evoluta, arriba establecidas.

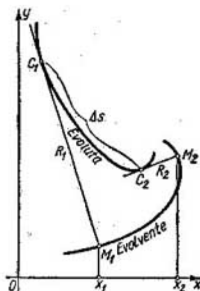


Fig 151

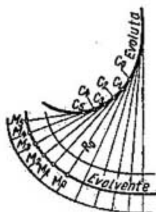


Fig. 152

Observemos que a una evoluta le corresponde una multitud infinita de diferentes evolventes (fig. 152).

Ejemplo. Se da una circunferencia de radio a (fig. 153), elijamos entre las evolventes de esta circunferencia la que pasa por el punto M_0 $(a, 0)$. Tomando

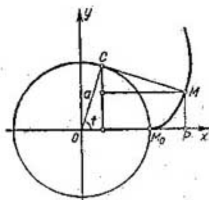


Fig. 153

en cuenta que $CM = \widehat{CM}_0 = at$, será fácil obtener las ecuaciones de la evolvente de la circunferencia:

$$OP = x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t),$$

$$PM = y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t).$$

Señalemos que el perfil del diente de un piñón tiene, en la mayoría de los casos, la forma de evolvente de un círculo.

§ 8. CALCULO APROXIMADO DE LAS RAICES REALES DE UNA ECUACION

Los métodos del análisis de la variación de funciones permiten calcular los valores aproximados de las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0,$$

Si ésta es una ecuación algebraica*) de primero, segundo, tercero o cuarto grado, existen también las fórmulas que permiten expresar las raíces de la ecuación en función de sus coeficientes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Para las ecuaciones de grado superior al cuarto las fórmulas de tal índole, en caso general, no existen. Si los coeficientes de cualquier ecuación, algebraica o no, (trascendente), son numéricos, sus raíces pueden ser aproximadamente calculadas con cualquier grado de precisión. Observemos que, incluso cuando las raíces de la ecuación algebraica se expresan mediante radicales, en la práctica, es a veces más conveniente aplicar métodos aproximados para resolver las ecuaciones. He aquí algunos métodos del cálculo aproximado de las raíces de una ecuación.

1. Método de las cuerdas. Sea dada la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función continua, derivada dos veces en el segmento $[a, b]$. Supongamos que analizando la función $y = f(x)$ dentro del segmento $[a, b]$ definimos otro segmento $[x_1, x_2]$ dentro del cual la función es monótona (creciente o decreciente) y en los extremos los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos contrarios. Para expresarse con más precisión supongamos que $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (fig. 154). Puesto que la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[x_1, x_2]$, su gráfica cortará el eje Ox en un punto, situado entre x_1 y x_2.

Tracemos la cuerda AB que une los extremos de la curva $y = f(x)$, correspondientes a las abscisas x_1 y x_2. Entonces, la abscisa a_1 del punto de intersección de la cuerda con el eje Ox será el valor aproximado de la raíz (fig. 155).

Para obtener este valor aproximado, escribamos la ecuación de la recta AB, que pasa por los puntos dados $A[x_1, f(x_1)]$ y $B[x_2, f(x_2)]$: $\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Puesto que $y = 0$ para $x = a_1$, por tanto:

$$\frac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1},$$

*) La ecuación $f(x) = 0$ se llama *algebraica*, si $f(x)$ es un polinomio (véase § 6, cap. VII).

de donde

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \qquad (2)$$

Para determinar el valor más exacto de la raíz hallamos $f(a_1)$. Si $f(a_1) < 0$, repitimos el mismo procedimiento, aplicando la fórmula (2) al segmento $[a_1, x_2]$. Si $f(a_1) > 0$, aplicamos la fórmula

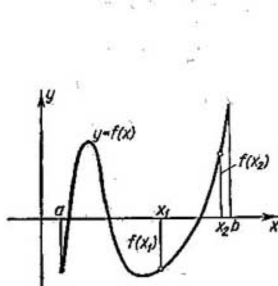


Fig. 154

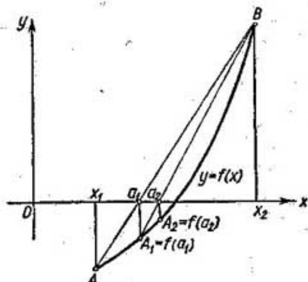


Fig. 155

mencionada para el segmento $[x_1, a_1]$. Utilizando este procedimiento unas cuantas veces, obtenemos, evidentemente los valores cada vez más precisos de la raíz a_2, a_3, etc.

Ejemplo 1. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

Solución. Hallemos ante todo los segmentos en que la función $f(x)$ es monótona. El resultado del cálculo de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6,$$

muestra que ésta es positiva para $x < -\sqrt{2}$, negativa para $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$, y de nuevo positiva para $x > \sqrt{2}$ (fig. 156). Así, la función tiene tres segmentos de monotonía dentro de cada uno de los cuales se halla una raíz. Para simplificar los cálculos ulteriores, haremos más estrechos estos segmentos de monotonía, pero de modo que en cada segmento siga permaneciendo la raíz correspondiente. Para esto, variando al azar los valores de x en la expresión de $f(x)$, encontremos dentro de cada segmento de monotonía otros más pequeños, en cuyos extremos la función tenga signos contrarios:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0, & f(0) = 2, \\ x_2 = 1, & f(1) = -3, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_3=-3, & f(-3)=-7, \\ x_4=-2, & f(-2)=6, \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{ll} x_5=2, & f(2)=-2, \\ x_6=3, & f(3)=11. \end{array}\right\}$$

De este modo, las raíces se encuentran en los intervalos:

$$(0;\ 1),\ (-3;\ -2),\ (2;\ 3).$$

Determinemos el valor aproximado de la raíz en el intervalo $(0;\ 1)$; según la fórmula (2) tenemos:

$$a_1=0-\frac{(1-0)\,2}{-3-2}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

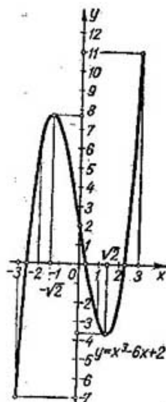


Fig. 156

Puesto que $f(0{,}4)=0{,}4^3-6\cdot 0{,}4+2=-0{,}336$, $f(0)=2$, la raíz se encuentra comprendida entre 0 y 0,4. Aplicando de nuevo la fórmula (2) para el intervalo, obtenemos el siguiente valor aproximado:

$$a_2=0-\frac{(0{,}4-0)\cdot 2}{-0{,}336-2}=\frac{0{,}8}{2{,}336}=0{,}342, \text{ etc.}$$

De modo análogo se hallan los valores aproximados de las raíces en otros intervalos.

2. Método de tangentes (Método de Newton). Supongamos de nuevo que $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$, y que en el segmento $[x_1,\ x_2]$ la primera derivada no cambia de signo. En este caso, en el intervalo $(x_1,\ x_2)$ se halla una raíz de la ecuación $f(x)=0$. Supongamos, además, que la segunda derivada tampoco cambia de signo en el segmento $[x_1,\ x_2]$, lo que puede lograrse, reduciendo el intervalo que contiene la raíz. El hecho de que la segunda derivada no cambia el signo en el segmento $[x_1,\ x_2]$ significa que la curva es sólo convexa o cóncava en este segmento.

Tracemos una tangente a la curva en el punto B (fig. 157). La abscisa a_1 del punto de intersección de la tangente con el eje Ox será el valor aproximado de la raíz buscada. Para encontrar esta abscisa, escribamos la ecuación de la tangente en el punto B:

$$y-f(x_2)=f'(x_2)\,(x-x_2).$$

Notamos que, si $y=0$, $x=a_1$, obtenemos:

$$a_1=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \qquad (3)$$

Tracemos luego una tangente en el punto B_1 y de modo análogo obtengamos un valor más preciso de la raíz a_2. Repitiendo este pro-

cedimiento unas cuantas veces, podemos calcular el valor aproximado de la raíz con cualquier grado de precisión que se desee.

Observemos la circunstancia siguiente. Si trazáramos la tangente a la curva no en el punto B, sino en el A, podría resultar que el punto de intersección de la tangente con el eje Ox se encontrara

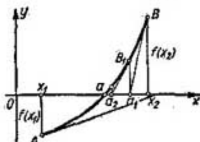


Fig. 157

fuera del intervalo (x_1, x_2). Se ve claramente en las figuras 157 y 158 que la tangente debe trazarse en aquel extremo del arco donde coinciden los signos de la función y de su segunda derivada. Según la hipótesis, la segunda derivada conserva su signo en el segmento

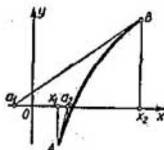


Fig. 158

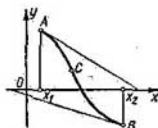


Fig. 159

$[x_1, x_2]$. Por consiguiente los signos de la función y de la segunda derivada coinciden obligatoriamente en uno de los extremos. Esta regla es también válida para el caso en que $f'(x) < 0$. Si la tangente se traza por el extremo izquierdo del intervalo, es preciso sustituir x_2 por x_1 en la fórmula (3):

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (3')$$

Si en el interior del intervalo (x_1, x_2) se encuentra un punto de inflexión C, el método de tangentes puede dar un valor aproximado de la raíz, situado fuera del intervalo (x_1, x_2) (fig. 159).

Ejemplo 2. Apliquemos la fórmula (3) para calcular la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$, comprendida en el intervalo (0; 1). Tenemos:

$$f(0) = 2, \ f'(0) = (3x^2 - 6)\mid_{x=0} = -6.$$

Por eso, según la fórmula (3) obtenemos:

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0{,}333.$$

3. Método combinado (fig. 160). Si en el segmento $[x_1, x_2]$ aplicamos simultáneamente los métodos de las cuerdas y de las tangentes, obtenemos dos puntos a_1 y $\bar{a}_1$, situados a ambos lados de la raíz buscada a (puesto que $f(a_1)$ y $f(\bar{a}_1)$ tienen signos contrarios).

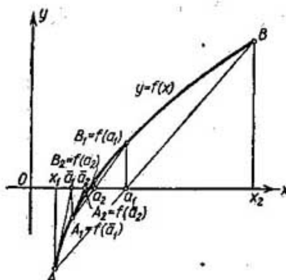


Fig. 160

Luego aplicamos los métodos de cuerdas y de tangentes en el segmento $[a_1, \bar{a}_1]$. Como resultado obtenemos dos números, a_2 y $\bar{a}_2$, aún más próximos al valor de la raíz. Procedemos de esta manera hasta que la diferencia entre los valores aproximados hallados sea menor que el grado necesario de precisión.

Notemos que aplicando el método combinado, nos aproximamos a la raíz buscada por los dos lados a la vez (es decir, encontramos simultáneamente tanto el valor aproximado por exceso, como por defecto).

Para ilustrar esta deducción en el ejemplo 2 podemos convencernos, mediante la sustitución, que $f(0{,}333) > 0$, $f(0{,}342) < 0$. Por consiguiente, el valor de la raíz está comprendido entre los valores aproximados:

$$0{,}333 < x < 0{,}342.$$

Ejercicios para el capítulo VI

Hallar la curvatura de las curvas en los puntos indicados: **1.** $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ en los puntos $(0, b)$ y $(a, 0)$. *Respuesta*: $\frac{b}{a^2}$ en el punto $(0, b)$; $\frac{a}{b^2}$ en el punto $(a, 0)$. **2.** $xy=12$ en el punto $(3, 4)$. *Respuesta*: $24/125$ **3.** $y=x^3$ en el punto (x_1, y_1). *Respuesta*: $\frac{6x_1}{(1+9x_1^4)^{3/2}}$. **4.** $16y^2=4x^4-x^6$ en el punto $(2, 0)$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$. **5.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ en el punto arbitrario. *Respuesta*: $1/3\,(axy)^{-\frac{1}{3}}$.

Hallar el radio de curvatura de las curvas en los puntos indicados; trazar cada curva y construir el círculo de curvatura correspondiente. **6.** $y^2=x^3$ en el punto $(4, 8)$. *Respuesta*: $R=80\sqrt{10/3}$. **7.** $x^2=4ay$ en el punto $(0, 0)$. *Respuesta*: $R=2a$. **8.** $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ en el punto (x_1, y_1). *Respuesta*: $R=\frac{(b^4x_1+a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$. **9.** $y=\ln x$ en el punto $(1, 0)$. *Respuesta*: $R=2\sqrt{2}$. **10.** $y=\operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, 1)$. *Respuesta*: $R=1$. **11.** $\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\operatorname{sen}^3 t \end{array}\right\}$ para $t=t_1$. *Respuesta*: $R=3a\operatorname{sen} t_1\cos t_1$.

Hallar el radio de curvatura de las curvas: **12.** $\left.\begin{array}{l} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{array}\right\}$ para $t=1$. *Respuesta*: $R=6$. **13.** La circunferencia $\rho=a\operatorname{sen}\theta$. *Respuesta*: $R=a/2$. **14.** La espiral de Arquímedes $\rho=a\theta$. *Respuesta*: $R=\frac{(\rho^2+a^2)^{3/2}}{\rho^2+2a^2}$. **15.** La cardioide $\rho=a(1-\cos\theta)$. *Respuesta*: $R=\frac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$. **16.** La lemniscata $\rho^2=a^2\cos 2\theta$. *Respuesta*: $R=\frac{a^2}{3\rho}$. **17.** La parábola $\rho=a\operatorname{sc}^2\frac{\theta}{2}$. *Respuesta*: $R=2a\operatorname{sc}^3\frac{\theta}{2}$. **18.** $\rho=a\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{3}$. *Respuesta*: $R=\frac{3}{4}a\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}$.

Hallar los puntos de las curvas en los que el radio de curvatura tenga un valor mínimo: **19.** $y=\ln x$. *Respuesta*: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **20.** $y=e^x$. *Respuesta*: $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **21.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. *Respuesta*: $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$. **22.** $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. *Respuesta*: En el punto $(0, 0)$ $R=a/2$.

Hallar las coordenadas del centro de curvatura (α, β) y las ecuaciones de la evoluta para cada una de las curvas siguientes:

23. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Respuesta*: $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$; $\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$. **24.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. *Respuesta*: $\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; $\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. **25.** $y^3=a^2x$. *Respuesta*: $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$; $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$. **26.** $\begin{cases} x=3t, \\ y=t^2-6. \end{cases}$ *Respuesta*: $\alpha=-\frac{4}{3}t^3$;

$\beta=3t^2-\frac{3}{2}$. 27. $\begin{cases} x=k\ln\operatorname{cotg}\frac{t}{2}-k\cos t, \\ y=k\operatorname{sen} t. \end{cases}$ *Respuesta:* $y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)$ (tractriz).

28. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\operatorname{sen} t) \\ y=a(\operatorname{sen} t-t\cos t) \end{cases}$, *Respuesta:* $\alpha=a\cos t$; $\beta=a\operatorname{sen} t$. 29. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$ *Respuesta:* $\alpha=a\cos^3 t+3a\cos t\operatorname{sen}^2 t$; $\beta=a\operatorname{sen}^3 t+3a\cos^2 t\operatorname{sen} t$. 30. Calcular las raíces de la ecuación $x^3-4x+2=0$ con la precisión de hasta 0,001. *Respuesta:* $x_1=1{,}675$, $x_2=0{,}539$, $x_3=-2{,}214$. 31. Calcular el valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x)=x^5-x-0{,}2=0$ comprendida en el intervalo (1; 1,1). *Respuesta:* 1,045. 32. Calcular las raíces de la ecuación $x^4+2x^2-6x+2=0$, con precisión de hasta 0,01. *Respuesta:* $0{,}38<x_1<0{,}39$; $1{,}24<x_2<1{,}25$. 33. Calcular el valor aproximado de la ecuación $x^3-5=0$. *Respuesta:* $x_1\approx 1{,}71$, $x_{2,3}=1{,}71\,\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. 34. Hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $x-\operatorname{tg} x=0$ comprendida entre 0 y $\frac{3\pi}{2}$. *Respuesta:* 4,4935. 35. Hallar la raíz aproximada de la ecuación $\operatorname{sen} x=1-x$ con precisión de 0,001.

Indicación: Redúzcase la ecuación a la forma $f(x)=0$. *Respuesta:* $0{,}5110<x<0{,}5111$.

Problemas

36. Demostrar que la curvatura en cada punto de la lemniscata $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ es proporcional al radio vector de este punto.

37. Hallar el valor máximo del radio de curvatura de la curva $\rho=a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$. *Respuesta:* $R=\frac{3a}{4}$.

38. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la curva $y=x\ln x$ en el punto, en que $y'=0$. *Respuesta:* $(e^{-1}, 0)$.

39. Comprobar que para los puntos de la espiral de Arquímedes $\rho=a\varphi$ el valor de la diferencia entre el radio vector y el radio de curvatura tiende a 0, cuando $\varphi\to\infty$.

40. Hallar la parábola $y=ax^2+bx+c$ que tiene en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ una tangente y curvatura comunes con la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$. Construir la gráfica. *Respuesta:* $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi x}{2}+1-\frac{\pi^2}{8}$.

41. La función $y=f(x)$ está definida del modo siguiente:

$$f(x)=x^3 \text{ en el intervalo } -\infty<x\leqslant 1$$
$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ en el intervalo } 1<x<+\infty.$$

¿Cuáles deben ser a, b, c para que la línea $y=f(x)$ tenga la curvatura continua en todos los puntos? Construir la gráfica. *Respuesta:* $a=3$, $b=-3$, $c=1$.

42. Demostrar que el radio de curvatura de una cicloide en cualesquiera de sus puntos es dos veces mayor que la normal en el mismo punto.

43. Escribir la ecuación de la circunferencia de curvatura de la parábola $y=x^2$ en el punto (1, 1). *Respuesta:* $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$.

44. Escribir la ecuación de la circunferencia de curvatura de la curva $y=\operatorname{tg} x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}\,;\,1\right)$. *Respuesta*: $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

45. Hallar la longitud total de la evoluta de una elipse cuyos semiejes son iguales a a y b. *Respuesta*: $4(a^3-b^3)/ab$.

46. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $xe^x=2$, con precisión de hasta 0,01. *Respuesta*: La ecuación tiene la única raíz real: $x\approx 0,84$.

47. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $x\ln x=0,8$ con precisión de hasta 0,01. *Respuesta*: La ecuación tiene la única raíz real: $x\approx 1,64$.

48. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $x^2 \operatorname{arctg} x=1$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta*: La ecuación tiene la única raíz real: $x\approx 1,096$.

CAPITULO VII

NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1. NUMEROS COMPLEJOS. GENERALIDADES

Se llama *número complejo* a toda expresión de la forma

$$a + bi, \tag{1}$$

donde, a y b son números reales; i es la *unidad llamada imaginaria*, definida por las ecuaciones:

$$i = \sqrt{-1} \quad ó \quad i^2 = -1; \tag{2}$$

a es la parte *real* y bi, parte *imaginaria* del número complejo. Dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$ que se diferencian sólo por el signo de su parte imaginaria se llaman *conjugados*.

Si $a = 0$, el número $0 + bi = bi$, es un número *puramente imaginario*; si $b = 0$, se obtiene un número real $a + 0 \cdot i = a$.

Aceptemos dos concepciones fundamentales:

1) dos números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ se consideran iguales, si:

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

es decir, si son iguales sus partes reales e imaginarias por separado;

2) un número complejo es igual a cero:

$$a + bi = 0,$$

siempre que $a = 0$, $b = 0$.

1. Representación geométrica de los números complejos. Todo número complejo $a + bi$ puede ser representado sobre el plano Oxy mediante un punto $A(a, b)$, de coordenadas a y b (fig. 161). Recíprocamente, todo punto $M(a, b)$ del plano Oxy puede considerarse como la imagen geométrica del número complejo $a + bi$.

Pero, si a todo punto $A(a, b)$ corresponde algún número complejo $a + bi$, se puede decir, en particular, que a todo punto del eje Ox le corresponde un número real ($b = 0$). Todo punto del eje Oy

representa un número puramente imaginario, puesto que en este caso $a = 0$. Por eso, representando los números complejos sobre un plano, el eje Oy se llama *eje imaginario* y el Ox, *eje real.*

Uniendo el punto $A(a, b)$ con el origen de coordenadas, obtenemos el vector $\overline{OA}$. En algunos casos es muy conveniente considerar el *vector* $\overline{OA}$ como la representación geométrica del número complejo $a + bi$.

2. Forma trigonométrica de los números complejos. Designemos por φ y r $(r \geqslant 0)$ las coordenadas polares del punto $A(a, b)$,

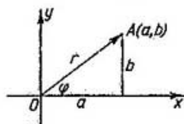


Fig. 161

tomando por polo el origen de coordenadas y por eje polar, la dirección positiva del eje Ox. En este caso (fig. 161), tenemos las expresiones siguientes:

$$a = r \cos \varphi, \qquad b = r \operatorname{sen} \varphi$$

y, por tanto, el número complejo puede ser representado en la forma:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). \tag{3}$$

La expresión representada por el segundo miembro se llama forma trigonométrica del número complejo $a + bi$. Las magnitudes r y φ se expresan en función de a y b mediante las fórmulas:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}.$$

El número r se llama *módulo* y φ, *argumento* del número complejo $a + bi$.

El argumento de un número complejo, es decir, el ángulo φ, es positivo, cuando se toma a partir de la dirección positiva del eje Ox en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y es negativo, cuando se calcula en dirección opuesta. Es evidente que el argumento φ no se determina de una manera unívoca, sino con precisión igual al valor del sumando $2\pi k$; donde k es cualquier número entero.

El módulo r del número complejo $a + bi$ se designa a veces por el símbolo $|a + bi|$:

$$r = |a + bi|.$$

Notemos que todo número real A también puede escribirse en la forma (3), o bien:

$$A = |A| (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \text{ cuando } A > 0$$
$$A = |A| (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \text{ cuando } A < 0.$$

El módulo del número complejo 0 es igual a cero: $|0| = 0$. Como argumento de cero se puede tomar caulquier ángulo φ. En efecto, para todo ángulo φ tiene lugar la igualdad:

$$0 = 0 \cdot (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

§ 2. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

1. Adición. La suma de dos números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, es un número complejo definido por la ecuación:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i. \qquad (1)$$

De la fórmula (1) se deduce que la adición de los números complejos, representados en forma de vectores, se efectúa según la regla de adición de vectores.

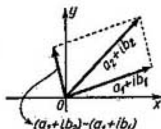


Fig. 162

2. Sustracción. La diferencia de dos números complejos, $a_2 + b_2 i$ y $a_1 + b_1 i$, es un número complejo que, adicionado a $a_1 + b_1 i$, da $a_2 + b_2 i$.

Es fácil ver que:

$$(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) i. \qquad (2)$$

Observemos que el módulo de la diferencia de dos números complejos $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ es igual a la distancia entre los puntos que representan estos números en el plano de la variable compleja (fig. 162).

3. Multiplicación. El producto de los números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, multiplicados estos números como binomios, según las reglas algebraicas, es un número complejo. Hay que tener

en cuenta que:

$$i^2 = -1;\ i^3 = (-1)\,i = -i;\ i^4 = (-i)\,(i) = -i^2 = 1;$$
$$i^5 = 1 \cdot i, \text{ etc.}$$

y, en general, para k entero:

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

En virtud de esta regla tenemos:

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2,$$

ó

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)\,i. \tag{3}$$

Si los números complejos están expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2 (\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 &+ \\ + i \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 + i^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2] &= \\ = r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2) &+ \\ + i (\operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2)] &= \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2 (\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned} \tag{3'}$$

es decir, el *producto de dos números complejos es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento es igual a la suma de argumentos de los factores.*

Observación 1. En virtud de la fórmula (3), los números complejos conjugados, $a + bi$ y $a - bi$, satisfacen a la igualdad:

$$(a + ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2,$$

es decir, el producto de dos números complejos conjugados es igual a la suma de los cuadrados de sus módulos.

4. División. La división de dos números complejos es la operación inversa a su multiplicación. Si

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + yi$$

(donde $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$), entonces x e y deben ser tales que se cumpla la igualdad:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)\,(x + yi),$$

o sea:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x)\, i.$$

Por consiguiente,

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \qquad b_1 = b_2 x + a_2 y,$$

de donde:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \qquad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

y finalmente:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

En la práctica, la división de los números complejos se efectúa de la manera siguiente: para dividir $a_1 + ib_1$ por $a_2 + ib_2$, multiplicamos, tanto el dividendo como el divisor, por un número complejo conjugado de este último (es decir, por $a_2 - ib_2$). Entonces, el divisor será un número real; al dividir por éste la parte real y la imaginaria del dividendo, obtenemos:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Si el número complejo está expresado en forma trigonométrica, tendremos:

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Para verificar esta igualdad, basta multiplicar el divisor por el cociente:

$$r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1).$$

De tal modo, *el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor; el argumento del cociente es igual a la diferencia entre los argumentos del dividendo y del divisor.*

Observación 2. De las reglas de operaciones con números complejos se deduce que la adición, sustracción, multiplicación y división de los números complejos dan de nuevo un número complejo. Si las reglas de operaciones con números complejos son aplicadas a los números reales (considerándolos como caso particular de los números complejos), entonces estas reglas coinciden con las reglas ordinarias de la aritmética.

Observación 3. Volviendo a la defición de suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos, es fácil comprobar que, si en estas expresiones son sustituidos los números complejos por sus números conjugados correspondientes, los resultados de las operaciones indicadas también son sustituidos por los números conjugados. De aquí, en particular, se deduce el teorema siguiente:

Teorema. *Si en un polinomio con coeficientes reales*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

sustituimos x por el número $a + bi$, y, después, por el número conjugado $a - bi$, los resultados obtenidos serán mutuamente conjugados.

§ 3. ELEVACION A POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAIZ DEL NUMERO COMPLEJO

1. Elevación a potencia. De la fórmula (3′) del párrafo precedente se deduce que si n es un número entero positivo, entonces:

$$[r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi). \qquad (1)$$

Esta expresión es la *fórmula de Moivre* y muestra que, *al elevar un número complejo a una potencia entera y positiva, el módulo de este número se eleva a la misma potencia y el argumento se multiplica por el exponente de esta potencia.*

Consideremos ahora una aplicación más de la fórmula de Moivre. Haciendo $r = 1$, obtenemos:

$$(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi.$$

Desarrollando el primer miembro según la fórmula del binomio de Newton e igualando las partes reales e imaginarias, podremos expresar $\mathrm{sen}\,n\varphi$ y $\cos n\varphi$ en función de potencias de $\mathrm{sen}\,\varphi$ y $\cos\varphi$.

Así, por ejemplo, si $n = 3$, obtenemos:
$\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi - i\operatorname{sen}^3\varphi = \cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi$.
Usando la igualdad de estos números complejos, tenemos:
$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$, $\operatorname{sen} 3\varphi = -\operatorname{sen}^3\varphi + 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi$.

2. Extracción de la raíz. La raíz n—ésima de un número complejo es otro número complejo que, al ser elevado a la potencia n, dará el número comprendido bajo el radical, es decir, si:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi),$$

$$\rho^n(\cos n\psi + i\operatorname{sen} n\psi) = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Como los módulos de los números complejos iguales han de ser iguales y los argumentos pueden diferenciarse en un múltiplo de 2π, tenemos:

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

De aquí:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

donde, k es un número entero arbitrario, $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético (real y positivo) de la raíz del número positivo r. Por consiguiente,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \quad (2)$$

Dando a k los valores 0, 1, 2 ..., $n - 1$, obtenemos n diferentes valores de la raíz. Para otros valores de k los argumentos se diferenciarán de los obtenidos antes en un múltiplo de 2π y, por tanto, se obtendrán los valores de la raíz que coinciden con los estudiados.

Así pues, la raíz n—ésima de un número complejo tiene n diferentes valores.

La raíz n—ésima del número real A, distinto de cero, también tiene n valores, puesto que el número real es un caso particular del número complejo y puede ser representado en forma trigonométrica:

si $A > 0$, tenemos: $A = |A|(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$;
si $A < 0$, tenemos: $A = |A|(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$.

Ejemplo 1. Hallar todos los valores de la raíz cúbica de la unidad.
Solución. Representemos la unidad en forma trigonométrica:

$$1 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0.$$

Según la fórmula (2):

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i \operatorname{sen} 0}=\cos \frac{0+2k\pi}{3}+i \operatorname{sen} \frac{0+2k\pi}{3}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, obtenemos tres valores de la raíz:

$$x_1=\cos 0+i \operatorname{sen} 0=1; \quad x_2=\cos \frac{2\pi}{3}+i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}; \quad x_3=\cos \frac{4\pi}{3}+i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}.$$

Tomando en cuenta que

$$\cos \frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}; \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}; \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

resulta:

$$x_1=1; \quad x_2=-\frac{1}{2}+i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_3=-\frac{1}{2}-i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En la figura 163 los puntos A, B, C son las imágenes geométricas de las raíces obtenidas.

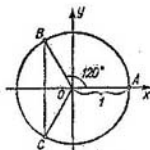


Fig. 163

3. Solución de la ecuación binomia. La ecuación

$$x^n=A$$

se llama *binomia*. Hallemos las raíces de esta ecuación.

Si A es un número real positivo, tenemos:

$$x=\sqrt[n]{A}\left(\cos \frac{2k\pi}{n}+i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

La expresión encerrada en el paréntesis da todos los valores de la raíz de n—ésima potencia de la 1.

Si A es un número real negativo, entonces:

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{n}+i \operatorname{sen} \frac{\pi+2k\pi}{n}\right).$$

La expresión entre paréntesis da todos los valores de la raíz de n—ésima potencia de -1.

Si A es un número complejo, los valores de x se hallan según la fórmula (2).

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^4 = 1.$$

Solución.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, 3, obtenemos:

$$x_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{4} = -i.$$

§ 4. FUNCION EXPONENCIAL CON EXPONENTE COMPLEJO Y SUS PROPIEDADES

Sea $z = x + iy$. Si x e y son variables reales, z es una variable compleja. A cada valor de la variable compleja le corresponde un punto bien determinado (fig. 161) en el plano Oxy (plano de la variable compleja.)

Definición. Si a cada valor de una variable compleja z, perteneciente a cierto dominio del plano de variables complejas, corresponde un valor bien determinado de otra variable compleja w, se dice que w es una *función de la variable compleja* z: $w = f(z)$ ó $w = w(z)$.

Existen las nociones del límite, de la derivada, de la integral, etc., de una función de variable compleja.

Estudiemos una función de la variable compleja, o bien, la función exponencial:

$$w = e^z$$

o sea:

$$w = e^{x+iy}.$$

Los valores complejos de la función w se determinan del modo siguiente*:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y), \tag{1}$$

*) Demostraremos más adelante (§ 21, cap. XIII y § 18 cap. XVI, tomo II) la conveniencia de esta definición de la función exponencial.

es decir,

$$w(z)=e^{x}(\cos y+i\operatorname{sen} y). \qquad (2)$$

Ejemplos:

1. $z=1+\frac{\pi}{4}i, \quad e^{1+\frac{\pi}{4}i}=e\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$

2. $z=0+\frac{\pi}{2}i, \quad e^{0+\frac{\pi}{2}i}=e^{0}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=i,$

3. $z=1+i, \quad e^{1+i}=e^{1}(\cos 1+i\operatorname{sen} 1)=0{,}54+i\cdot 0{,}83,$

4. $z=x$ (x es un número real), $e^{x+0i}=e^{x}(\cos 0+i\operatorname{sen} 0)=e^{x}$ que es una función exponencial ordinaria.

Propiedades de la función exponencial

1. Si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}. \qquad (3)$$

Demostración. Sea

$$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2;$$

entonces

$$e^{z_1+z_2}=e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=$$
$$=e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \qquad (4)$$

Por otra parte, en virtud del teorema sobre el producto de dos números complejos expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\operatorname{sen} y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2+i\operatorname{sen} y_2)=$$
$$=e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \qquad (5)$$

Los segundos miembros de las igualdades (4) y (5) son iguales y, por consiguiente, serán iguales también los primeros

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}.$$

2. De modo análogo se demuestra la fórmula:

$$e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \qquad (6)$$

3. Si m es un número entero, tenemos:

$$(e^{z})^{m}=e^{mz}. \qquad (7)$$

Esta fórmula se obtiene fácilmente de (3), cuando $m>0$.

La misma se obtiene a partir de las fórmulas (3) y (6) si $m < 0$.

4. Demostremos la identidad:

$$e^{z+2\pi i} = e^{z}. \tag{8}$$

En efecto, según las fórmulas (3) y (1) tenemos:

$$e^{z+2\pi i} = e^{z}e^{2\pi i} = e^{z}(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^{z}.$$

De la identidad (8) se deduce que la función exponencial e es una función periódica con período $2\pi i$.

5. Estudiemos ahora la magnitud compleja

$$w = u(x) + iv(x),$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones reales de la variable real x. Es una *función compleja de la variable real*.

a) Supongamos que existen los límites:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0); \qquad \lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0).$$

Entonces, $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ es el límite de la variable compleja w.

b) Si existen las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, la expresión

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \tag{9}$$

es la *derivada* de una función compleja de variable real con respecto al argumento real.

Estudiemos ahora la siguiente función exponencial:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x},$$

donde α y β son números constantes reales, y x es una variable real. Es una función compleja de variable real que, conforme a la fórmula (1), puede escribirse así:

$$w = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x]$$

ó

$$w = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Hallemos la derivada w'_x. Según la fórmula (9) tenemos:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i(e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x)' = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \operatorname{sen} \beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha \operatorname{sen} \beta x + \beta \cos \beta x) = \\ &= \alpha [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] + i\beta [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta)[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha + i\beta)x}. \end{aligned}$$

Así pues, si $w = e^{(\alpha+i\beta)x}$, entonces: $w' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$

ó

$$[e^{(\alpha+i\beta)x}]' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}. \tag{10}$$

De tal modo, si k es un número complejo (y, en particular, real) y x es un número real:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{9'}$$

Hemos obtenido la fórmula general para la derivación de una función exponencial. También tenemos:

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k(e^{kx})' = k^2 e^{kx}$$

y para n arbitrario:

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Utilizaremos estas fórmulas más adelante.

§ 5. FORMULA DE EULER. FORMA EXPONENCIAL DEL NUMERO COMPLEJO

Si hacemos $x = 0$ en la fórmula (1) del párrafo anterior, obtenemos:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \tag{1}$$

Esta es la *fórmula de Euler* y expresa la relación entre la función exponencial con exponente imaginario y las funciones trigonométricas.

Sustituyendo y por $-y$ en la fórmula (1), obtenemos:

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2) hallemos $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \operatorname{sen} y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Las fórmulas (3) se usan, en particular, para expresar las potencias de $\cos \varphi$ y de $\operatorname{sen} \varphi$, así como también de sus productos, en función del seno y del coseno de arcos múltiples.

Ejemplos:

1. $$\cos^2 y = \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) =$$

$$= \frac{1}{4}[(\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) + 2 + (\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y)] =$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y).$$

$$2.\ \cos^2\varphi\,\text{sen}^2\varphi=\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2=$$

$$=\frac{(e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2}=-\frac{1}{8}\cos 4\varphi+\frac{1}{8}.$$

Forma exponencial del número complejo. Escribamos un número complejo z en forma trigonométrica:

$$z=r(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi),$$

donde, r es el módulo y φ, el argumento de este número complejo. Según la fórmula de Euler:

$$\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi=e^{i\varphi}.$$

Por consiguiente, todo número complejo puede ser representado en la forma exponencial:

$$z=re^{i\varphi}.$$

Ejemplos. Escribir los números 1, i, -2, $-i$ en la forma exponencial.
Solución.

$$1=\cos 2k\pi+i\,\text{sen}\,2k\pi=e^{2k\pi i},$$

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)=2e^{\pi i},$$

$$-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

§ 6. DESARROLLO DEL POLINOMIO EN FACTORES

Sabemos que la función

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n,$$

en la que n es un número entero se llama *polinomio* o *función racional entera de x*. El número n es el *grado del polinomio*. Los coeficientes A_0, A_1 ... A_n son aquí números reales o complejos. La variable independiente x puede tomar tanto valores reales como complejos. El valor de la variable x para el cual el polinomio se reduce a cero es la *raíz* del polinomio.

Teorema 1. (Teorema de Bezout). *El resto de la división del polinomio $f(x)$ por la diferencia $(x-a)$ es igual a $f(a)$.*

Demostración. El cociente de la división del polinomio $f(x)$ por $(x-a)$ es un polinomio $f_1(x)$, de grado inferior en una unidad

que él del polinomio $f(x)$, el resto es un número constante R. Entonces podemos escribir:

$$f(x) = (x - a)\ f_1(x) + R. \qquad (1)$$

Esta igualdad es válida para todos los valores de x distintos de a (la división por $x - a$ cuando $x = a$ no tiene sentido).

Si x tiende a a, el límite del primer miembro de la igualdad (1) es $f(a)$ y el límite del segundo miembro, es R. Como las funciones $f(x)$ y $(x - a)\ f_1(x) + R$ son iguales para todos los valores de $x \neq a$, sus límites serán también iguales, cuando $x \to a$, es decir, $f(a) = R$.

Colorario. *Si a es una raíz del polinomio, es decir, $f(a) = 0$, entonces $f(x)$ se divide por $x - a$ sin resto alguno* y, por tanto, se representa como un producto:

$$f(x) = (x - a)\ f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio.

Ejemplo 1. El polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ se anula cuando $x = 1$, es decir, $f(1) = 0$. Por eso el polinomio dado se divide sin resto por $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Estudiemos ahora las ecuaciones con una incógnita x.

Todo número (real o complejo) que sustituya a x en la ecuación y la convierta en identidad, se llama *raíz* de la ecuación.

Ejemplo 2. Los números $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; $x_3 = \frac{9\pi}{4}$; ..., son raíces de la ecuación $\cos x = \operatorname{sen} x$.

Si una ecuación tiene la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es polinomio de grado n, se llama ecuación *algebraica* de n—ésimo grado. De la definición se deduce que las raíces de la ecuación algebraica $P(x) = 0$ son idénticas a las del polinomio $P(x)$.

Naturalmente, surge la pregunta, si toda ecuación tiene raíces. Para las ecuaciones no algebraicas la respuesta es negativa: existen ecuaciones no algebraicas que no tienen raíces (reales, ni complejas), como, por ejemplo, la ecuación $e^x = 0$*).

Sin embargo, para las ecuaciones algebraicas la respuesta es positiva, lo que constituye el contenido del siguiente teorema fundamental del álgebra.

---

*) En efecto, si el número $x_1 = a + bi$ fuera la raíz de esta ecuación, existiría la identidad $e^{a+bi} = 0$, o (en virtud de la fórmula de Euler) $e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b) = 0$. Pero, e^a no puede anularse cualquiera que sea el número real a; tampoco $\cos b = i \operatorname{sen} b$ es igual a cero (puesto que el módulo de este número es igual a $\sqrt{\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b} = 1$ para cualquier b). Por tanto, el producto $e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b) \neq 0$, es decir, $e^{a+bi} \neq 0$, lo que significa que la ecuación $e^x = 0$ no tiene raíces.

Teorema 2. (***Teorema fundamental del álgebra***). *Toda función racional entera $f(x)$ tiene por lo menos una raíz real o compleja.*

Este teorema se demuestra en el curso de álgebra superior. Aquí lo admitiremos sin demostración.

Utilizando el teorema fundamental del álgebra es fácil demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3. *Todo polinomio de n—ésimo grado puede ser desarrollado en n factores lineales de la forma $x - a$ y un factor igual al coeficiente de x^n.*

Demostración. Sea $f(x)$ un polinomio de grado n:

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n.$$

En virtud del teorema fundamental este polinomio tiene por lo menos una raíz; designémosla por a_1. Ahora bien, según el corolario del teorema de Bezout podemos escribir:

$$f(x) = (x - a_1)\, f_1(x),$$

donde, $f_1(x)$ es el polinomio de grado $(n - 1)$; $f_1(x)$ también tiene una raíz que designemos por a_2. Entonces,

$$f_1(x) = (x - a_2)\, f_2(x),$$

donde, $f_2(x)$ es el polinomio de grado $(n - 2)$. De igual manera:

$$f_2(x) = (x - a_3)\, f_3(x).$$

Continuando este proceso, llegamos a la expresión:

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n)\, f_n,$$

donde f_n es un polinomio de grado cero, es decir, f_n es un número fijo. Evidentemente, este número es igual al coeficiente de x^n, es decir, $f_n = A_0$.

En virtud de las igualdades obtenidas podemos escribir:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n). \qquad (2)$$

Del desarrollo (2) se deduce que los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ son las raíces del polinomio $f(x)$, puesto que, realizada la sustitución $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_n$, el segundo miembro y, por consiguiente, el primero se reducen a cero.

Ejemplo 3. El polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ se reduce a cero, cuando

$$x = 1,\ x = 2,\ x = 3.$$

Por consiguiente,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Ningún valor $x = a$ distinto de $a_1, a_2, \dots, a_n$ puede ser raíz del polinomio $f(x)$, puesto que ningún factor del segundo miembro

de la igualdad (2) se anula cuando $x = a$. Ahora podemos expresar el siguiente enunciado:

Todo polinomio de grado n no puede tener más que n raíces diferentes.

Pero, en este caso, obtenemos el teorema siguiente.

Teorema 4. *Si los valores de dos polinomios $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ de grado n coinciden para $n + 1$ valores diferentes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ del argumento x, los polinomios enunciados son idénticos.*

Demostración. Designemos por $f(x)$ la diferencia de estos polinomios:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Según la hipótesis, $f(x)$ es un polinomio de grado no superior a n, que se reduce a cero en los puntos $a_1, \ldots, a_n$. Por tanto, éste puede ser representado en la forma:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Pero, según la hipótesis, $f(x)$ se anula también en el punto a_0. Entonces, $f(a_0) = 0$, siendo distintos de cero todos los factores lineales. Por eso, $A_0 = 0$, y de la igualdad (2) se deduce que el polinomio $f(x)$ es idénticamente igual a cero. Por consiguiente, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, ó $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Teorema 5. *Si el polinomio*

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

es idénticamente igual a cero, todos sus coeficientes son iguales a cero.

Demostración. Escribamos el desarrollo de este polinomio en factores según la fórmula (2):

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = \\ = A_0(x - a_1) \ldots (x - a_n). \quad (1')$$

Si este polinomio es idénticamente igual a cero, también será igual a cero para un valor de x, distinto de $a_1, \ldots, a_n$. Pero, en este caso, los factores $x - a_1, \ldots, x - a_n$ no se anulan y, por tanto, $A_0 = 0$.

De igual manera se demuestra que $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, etc.

Teorema 6. *Los coeficientes correspondientes de dos polinomios idénticamente iguales son iguales.*

Esto se deduce del hecho de que la diferencia entre los polinomios dados es un polinomio idénticamente igual a cero. Por tanto, en virtud del teorema anterior, todos sus coeficientes son ceros.

Ejemplo 4. Si el polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ es idénticamente igual al polinomio $x^2 - 5x$, entonces: $a = 0$, $b = 1$, $c = -5$, $d = 0$.

§ 7. RAICES MULTIPLES DEL POLINOMIO

Si ciertos factores lineales del desarrollo de un polinomio de grado n

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) \tag{1}$$

son iguales, se puede agruparlos y luego, factorizar el polinomio de la manera siguiente:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m}. \tag{1'}$$

Donde

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

En este caso se dice que a_1 es una *raíz múltiple* de orden k_1, (k_1, es la multiplicidad de la raíz); a_2 es una raíz múltiple de orden k_2, etc.

Ejemplo. El polinomio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ se desarrolla en los suguientes factores lineales:

$$f(x) = (x-2)(x-2)(x-1).$$

Este desarrollo puede escribirse así:

$$f(x) = (x-2)^2 (x-1),$$

$a_1 = 2$ es una raíz doble; $a_2 = 1$, una raíz simple.

Si el polinomio tiene una raíz múltiple a de orden k, consideremos que el polinomio tiene k raíces iguales. Entonces, del teorema del desarrollo de un polinomio en factores lineales se deduce el teorema siguiente.

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas).

Observación. Todo lo que se ha dicho acerca de las raíces del polinomio

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

es igualmente cierto para las raíces de una ecuación algebraica:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

Demostremos a continuación, el teorema siguiente:

Teorema. *Si a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 > 1$ para el polinomio $f(x)$, entonces a_1 será una raíz múltiple de orden $k - 1$ para la derivada $f'(x)$.*

Demostración. Si a_1 es una raíz múltiple de orden k_1 donde $k_1 > 1$ de la fórmula (1') se deduce:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x),$$

donde $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m}$ no se anula para $x = a_1$, es decir, $\varphi(a_1) \neq 0$. Derivando, tenemos:

$$f'(x) = k_1 (x - a_1)^{k_1 - 1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) =$$
$$= (x - a_1)^{k_1 - 1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)].$$

Designemos:

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

Entonces,

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1} \psi(x),$$

donde:

$$\psi(a_1) = k_1 \varphi(a_1) + (a_1 - a_1) \varphi'(a_1) = k_1 \varphi(a_1) \neq 0,$$

es decir, $x = a_1$ es la raíz múltiple de orden $k_1 - 1$ del polinomio $f'(x)$. De la demostración se deduce que si $k_1 = 1$, a_1 no es una raíz de la derivada $f'(x)$.

Del teorema demostrado se deduce que a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 - 2$, para la derivada $f''(x)$, una raíz de orden $k_1 - 3$, para la derivada $f'''(x)$ . . ., una raíz de orden 1 (raíz simple), para la derivada $f^{(k_1 - 1)}(x)$; y no es una raíz para la derivada $f^{(k_1)}(x)$, es decir,

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad f''(a_1) = 0, \ \ldots, \ f^{(k_1 - 1)}(a_1) = 0,$$

pero

$$f^{(k)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. FACTORIZACION DE UN POLINOMIO CON RAICES COMPLEJAS

Las raíces $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la fórmula (1), § 7, cap. VII pueden ser tanto reales como complejas. Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema. *Si un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene la raíz compleja $a + bi$, este polinomio tiene también una raíz conjugada $a - bi$.*

Demostración. Si en el polinomio $f(x)$ sustituimos x por el número $a + bi$, elevamos a unas potencias y agrupamos por separado los términos que contienen y no contienen i, obtenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni,$$

donde M y N son las expresiones que no contienen i.

Puesto que $a + bi$ es la raíz del polinomio, tenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni = 0$$

de donde:

$$M = 0, \ N = 0$$

Sustituimos ahora x en el polinomio por la expresión $a - bi$. Entonces (según la observación 3, § 2), obtenemos un número conjugado con $M + Ni$, es decir,

$$f(a - bi) = M - Ni.$$

Como $M = 0$, y $N = 0$, se tiene: $f(a - bi) = 0$, es decir, $a - bi$ es una raíz del polinomio.

Por consiguiente, en la factorización

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

las raíces complejas se encuentran en *pares conjugados*.

Al multiplicar entre sí los factores lineales que corresponden al par de raíces complejas conjugadas, obtenemos un trinomio de segundo grado con coeficientes reales:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] =$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

donde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ son los números reales.

Si el número $a + bi$ es una raíz múltiple de orden k, el número conjugado $a - bi$ es también una raíz múltiple de orden k, de modo que, en la factorización de un polinomio entran tantos factores lineales $x - (a + bi)$ cuantos sean los factores lineales $x - (a - bi)$. Así, *todo polinomio con coeficientes reales se desarrolla en factores con coeficientes reales de primero y segundo grado de multiplicidad correspondiente, es decir,*

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots$$
$$\dots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s},$$

donde

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n.$$

§ 9. INTERPOLACION. FORMULA DE LA INTERPOLACION DE LAGRANGE

Supongamos que al estudiar cierto fenómeno, fue demostrada la existencia de una dependencia funcional entre las magnitudes x e y, que caracteriza el aspecto cuantitativo de este fenómeno. La función $y = \varphi(x)$ es desconocida, sin embargo, mediante una serie de experiencias determinemos los valores de esta función: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ para ciertos valores del argumento $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

El problema consiste en hallar la función más simple, para facilitar los cálculos (un polinomio, por ejemplo) que sea la expresión exacta o aproximada de la función desconocida $y = \varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. En forma más abstracta el problema puede ser

formulado de modo siguiente: los valores de una función desconocida $y = \varphi(x)$ se dan en $n+1$ puntos diferentes: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del segmento $[a, b]$:

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n);$$

es preciso hallar un *polinomio* $P(x)$ del grado inferior o igual a n que exprese aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Para esto elijamos un polinomio cuyos valores en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *coincidan* con los correspondientes valores de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la función $\varphi(x)$ (fig. 164). En este caso,

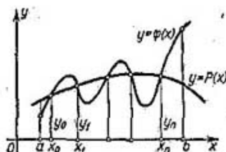


Fig. 164

el problema planteado, que se llama «problema *de interpolación* de la función», se puede formular de modo siguiente: hallar para una función dada $\varphi(x)$ un polinomio $P(x)$ de grado $\leqslant n$, que tome en los puntos dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los valores

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n).$$

Tomemos para esto un polinomio de n-ésimo grado y de la forma:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & C_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ & + C_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ & + C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots \\ & \ldots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \qquad (1)$$

Determinemos los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_n$ de tal manera que se cumplan las condiciones:

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n. \qquad (2)$$

Hagamos $x = x_0$ en la fórmula (1); entonces, teniendo en cuenta las igualdades (2), obtenemos:

$$y_0 = C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)$$

de donde

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

Haciendo, luego, $x = x_1$, obtenemos:

$$y_1 = C_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)$$

de donde

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)}.$$

De igual manera encontramos

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)};$$

. . . .

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Poniendo los valores determinados de los coeficientes en la fórmula (1), obtenemos:

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} y_2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})} y_n. \quad (3)$$

La fórmula enunciada se llama *fórmula de interpolación de Lagrange.*

Admitamos sin demostración que si $\varphi(x)$ tiene una derivada de $(n + 1)$ — ésimo orden en el segmento $[a, b]$, el error cometido, al reemplazar la función $\varphi(x)$ por el polinomio $P(x)$, (es decir, la magnitud $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ satisface a la desigualdad:

$$|R(x)| < |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \frac{1}{(n + 1)!} \text{máx} |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Observación. Del teorema 4, § 6, se deduce que el polinomio $P(x)$ es el único que satisface a las condiciones del problema planteado.

Ejemplo. Como resultado de un experimento hemos obtenido los valores de la función $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ para $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ para $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ para $x_2 = -4$. Hallar la expresión aproximada de la función $y = \varphi(x)$ por medio del polinomio de segundo grado.

Solución. Según la fórmula (3) tenemos (para $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}(-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}4,$$

o sea

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. FORMULA DE LA INTERPOLACION DE NEWTON

Sean conocidos $n+1$ valores de la función $\varphi(x)$: $y_0, y_1, \ldots, y_n$, que corresponden a $n+1$ valores del argumento: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, siendo constante la diferencia entre los valores contiguos del argumento. Designemos por h esta diferencia. La tabla de valores de la función desconocida $y = \varphi(x)$ para los valores correspondientes del argumento tendrá la forma siguiente.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	y_n

Formemos un polinomio de grado no superior a n, que tomará valores correspondientes a los de x. Este polinomio representará aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Introduzcamos las designaciones:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;\quad \Delta y_1 = y_2 - y_1;\quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \text{ etc.}$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0),$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0),$$
$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

Estas son las llamadas diferencias de primero, segundo y n-ésimo orden. Escribamos un polinomio que toma los valores

$$y_0, y_1 \text{ para } x_0 \text{ y } x_1.$$

Será un polinomio de primer grado

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \quad (1)$$

En efecto,

$$P_1(x)|_{x=x_0} = y_0, \quad P_1|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1.$$

Escribamos un polinomio que toma los valores

$$y_0, \; y_1, \; y_2 \text{ para } x_0, \; x_1, \; x_2.$$

Será un polinomio de segundo grado:

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right). \qquad (2)$$

Es evidente que

$$P_2 \,|_{x=x_0} = y_0, \; P_2 \,|_{x=x_1} = y_1.$$

Comprobemos ahora:

$$P_2|_{x=x_2} = y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{2h}{h} \left(\frac{2h}{h} - 1 \right) = y_2.$$

El polinomio de tercer orden tendrá la forma:

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x - x_0}{h} \times$$

$$\times \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right).$$

El polinomio del orden n que asume los valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ para $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, será:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{h} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \ldots \left[\frac{x - x_0}{h} - (h - 1) \right]. \qquad (4)$$

Mediante una sustitución directa es fácil convencerse de que la igualdad obtenida es correcta. Esta es la fórmula o el polinomio de la interpolación de Newton.

En esencia, el polinomio de Lagrange y el de Newton para la tabla dada de valores, son idénticos aunque escritos de modo diferente. Es decir, el polinomio de grado no superior a h, que tom a $n + 1$ valores dados para $n + 1$ valores de x, se halla de una sol a manera.

En muchos casos resulta más conveniente utilizar el polinomio de la interpolación de Newton que el de Lagrange. Su particularidad consiste en que, al pasar del polinomio de grado k al polinomio de grado $k+1$, los primeros $k+1$ términos no cambian, sino que se adiciona un término nuevo que es igual a cero, para todos los valores anteriores del argumento.

Observación. Según las fórmulas de Lagrange (véase la fórmula 3 § 10) y de Newton (fórmula 4) se determinan los valores de una función en el segmento $x_0 < x < x_n$. Si estas fórmulas se usan para determinar el valor de la función, cuando $x < x_0$ (lo que se puede hacer cuando $|x - x_0|$ es pequeño), se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia atrás. Si se determina el valor de la función para $x_0 < x$, se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia adelante.

§ 11. DERIVACION NUMERICA

Supongamos que los valores de una función desconocida $\Phi(x)$ están dados por medio de la tabla que fue examinada anteriormente. Es preciso determinar aproximadamente la derivada de esta función. Con este fin se forma el polinomio de interpolación de Lagrange o de Newton y de este último se halla la derivada.

Puesto que más a menudo se analizan las tablas de iguales diferencias entre los valores vecinos del argumento, utilicemos la fórmula de interpolación de Newton. Sean dados tres valores de la función: y_0, y_1, y_2, que corresponden a los valores: x_0, x_1, x_2 del argumento. Entonces, escribamos el polinomio (2) y derivémoslo. Obtenemos el valor aproximado de la derivada de la función en el segmento $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$

$$\varphi^1(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x-x_0}{h} - 1\right). \qquad (5)$$

Cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}. \qquad (6)$$

Examinemos el polinomio de tercer orden (véase (3)), y derivándolo, obtenemos la siguiente expresión para su derivada:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x-x_0}{h} - 1\right) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{2\cdot 3h}\left[3\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + 2\right]. \qquad (7)$$

En particular, cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P'_3(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \tag{8}$$

Al utilizar la fórmula (4), cuando $x = x_0$, obtenemos la siguiente forma para la expresión aproximada de la derivada:

$$\varphi'(x_0) \approx P'_n(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \tag{9}$$

Notemos que para una función que tiene derivadas, la diferencia Δy_0 es una infinitesimal de primer orden respecto a h; $\Delta^2 y_0$, infinitesimal de segundo orden; $\Delta^3 y_0$, de tercer orden, etc.

§ 12. OPTIMA APROXIMACION DE LAS FUNCIONES POR MEDIO DE POLINOMIOS. TEORIA DE CHEBISHEV

Del problema examinado en el § 9, se deduce, naturalmente, lo siguiente: sea una función continua $\varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. ¿Se puede expresarla aproximadamente en forma de un polinomio $P(x)$ con cualquier grado de precisión previamente dado? Es decir, ¿será posible encontrar un polinomio $P(x)$ tal que la diferencia en valor absoluto, entre $\varphi(x)$ y $P(x)$, sea inferior en todos los puntos del segmento $[a, b]$, que cualquier número positivo ε previamente dado? El teorema que sigue y que citamos aquí sin demostración, nos da una respuesta afirmativa*.

Teorema de Weierstrass. *Si la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$, que en cada punto de este segmento se cumpla la igualdad:*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

S. N. Bernstein, notable matemático y académico soviético, nos ha proporcionado el siguiente método racional para la formación directa de polinomios aproximadamente iguales a la función continua $\varphi(x)$ en el segmento dado.

Supongamos, por ejemplo, que la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[0, 1]$.

---

*) Notemos que el polinomio de la interpolación de Lagrange (véase (3) § 9) no da la respuesta a la cuestión planteada. En los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ los valores de este polinomio en realidad son iguales a los valores correspondientes de la función, pero en otros puntos del segmento $[a, b]$ estos valores pueden diferenciarse notablemente.

Formemos la expresión:

$$B_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

En esta expresión C_n^m son coeficientes binomiales; $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ es el valor de la función dada en el punto $x=\frac{m}{n}$. La expresión $B_n(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado, llamado *de Bernstein.*

Para todo número arbitrario $\varepsilon>0$ positivo, se puede buscar un polinomio de Bernstein tal (es decir, elegir su grado n) de manera que para todos los valores de x en el segmento $[0, 1]$ se cumpla la desigualdad:

$$|B_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

Observemos que el análisis del segmento $[0, 1]$ en lugar del segmento arbitrario $[a, b]$ no limita esencialmente las leyes generales puesto que mediante el cambio de variable: $x=a+t(b-a)$, se puede transformar cualquier segmento $[a, b]$, en el segmento $[0, 1]$. Esta transformación conserva el grado del polinomio.

La teoría sobre la óptima aproximación de las funciones mediante polinomios fue desarrollada por el célebre matemático ruso P. L. Chébishev (1821-1894).

Los valiosos resultados que obtuvo en este campo, han influenciado decisivamente en los trabajos de matemáticos posteriores. El punto de partida en la creación de esta teoría fue su trabajo en la teoría de los mecanismos articulados que son de amplio uso en la maquinaria. El estudio de tales mecanismos le condujo a la búsqueda entre todos los polinomios de un grado n dado, cuyo coeficiente de término mayor es igual a la unidad, de un polinomio tal que se desvíe de cero, en el segmento dado, mucho menor que todos los demás polinomios. Este gran matemático logró a resolver el problema y los polinomios hallados por él fueron llamados *polinomios de Chébishev.* Estos poseen muchas propiedades notables y son actualmente un potente medio de investigaciones en numerosos problemas matemáticos y técnicos.

Ejercicios para el capítulo VII

1. Hallar $(3+5i)(4-i)$. *Respuesta*: $17+17i$. 2. Hallar $(6+11i)(7+3i)$. *Respuesta:* $9+95i$. 3. Hallar $\frac{3-i}{4+5i}$. *Respuesta:* $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. 4. Hallar $(4-7i)^3$. *Respuesta*: $-524+7i$. 5. Hallar $\sqrt{i}$. *Respuesta*: $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 6. Ha-

llar $\sqrt{-5-12i}$. *Respuesta:* $\pm(2-3i)$. 7. Reducir a la forma trigonométrica las expresiones: a) $1+i$. *Respuesta:* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$. b) $1-i$. *Respuesta:* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$. 8. Hallar $\sqrt[3]{i}$. *Respuesta:* $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$. 9. Expresar en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ las siguientes expresiones: $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 4x$, $\cos 4x$, $\operatorname{sen} 5x$, $\cos 5x$. 10. Expesar en función del seno y coseno de los arcos múltiples las expresiones: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$; $\operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{sen}^3 x$, $\operatorname{sen}^4 x$, $\operatorname{sen}^5 x$. 11. Dividir $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ por $x+4$. *Respuesta:* $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, es decir, cociente $=x^2-8x+40$; el resto $f(-4)=-161$. 12. Dividir $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ por $x+3$. *Respuesta:* $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. 13. Dividir $f(x)=x^7-1$ por $x-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Factorizar los polinomios: 14. $f(x)=x^4-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. 15. $f(x)=x^2-x-2$. *Respuesta:* $f(x)=(x-2)(x+1)$. 16. $f(x)=x^3+1$. *Respuesta:* $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$.

17. Como resultado de un experimento se han obtenido los valores de la función y de x:

$$y_1=4 \text{ para } x_1=0,$$
$$y_2=6 \text{ para } x_2=1,$$
$$y_3=10 \text{ para } x_3=2.$$

Expresar de modo aproximado esta función mediante un polinomio de segundo grado. *Respuesta:* x^2+x+4.

18. Hallar el polinomio de cuarto grado que toma respectivamente los valores 2, 1,—1, 5, 0, para $x=1, 2, 3, 4, 5$. *Respuesta:*

$$\frac{3}{2}x^4-17x^3+\frac{129}{2}x^2-92x+35.$$

19. Hallar el polinomio de grado posiblemente inferior que toma respectivamente los valores 3, 7, 9, 19 para $x=2, 4, 5, 10$. *Respuesta:* $2x-1$.

20. Hallar los polinomios de Bernstein de primero, segundo, tercero, cuarto grados para la función $y=\operatorname{sen}\pi x$ en el segmento $[0,1]$. *Respuesta:* $B_1(x)=0$; $B_2(x)=2x(1-x)$; $B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$; $B_4(x)=2x(1-x)\times[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}]$.

CAPITULO VIII

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. DEFINICION DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Examinando las funciones de una sola variable, ya hemos indicado que el estudio de diferentes fenómenos obliga a utilizar las funciones de dos y más variables independientes. Demos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. El área S de un rectángulo de lados x e y, se da por la fórmula:

$$S = xy.$$

A cada par de valores de x e y, corresponde un valor determinado del área S; S es una función de dos variables.

Ejemplo 2. El volumen V de un paralelepípedo recto, en que las aristas tienen longitudes iguales a x, y, z, se da por la fórmula:

$$V = xyz.$$

Aquí, V es una función de tres variables: x, y, z.

Ejemplo 3. El alcance R de un proyectil lanzado a la velocidad inicial v_0, bajo el ángulo φ respecto al horizonte, se expresa por la fórmula:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

(despreciando la resistencia del aire). El símbolo g en la fórmula representa la aceleración debida a la fuerza de gravedad. Para cada par de valores v_0 y φ la fórmula da un determinado valor de R, es decir, R es una función de dos variables, v_0 y φ.

Ejemplo 4.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Aquí, u es una función de cuatro variables x, y, z, t.

Definición 1. Si a cada par (x, y) de valores de dos variables, x e y, independientes una de otra, tomadas de cierto campo D de su variación, le corresponde un valor determinado de la magnitud z, se dice que z es una *función de dos variables independientes x e y*, definida en el campo D.

En forma simbólica una función de dos variables se representa así:

$$z = f(x, y),\ z = F(x, y),\ \text{etc.}$$

Una función de dos variables puede expresarse por medio de una tabla o analíticamente mediante una fórmula (como se ha hecho en los cuatro ejemplos examinados). La fórmula permite formar la tabla de los valores que toma la función para cada par de valores de las variables independientes. Para el ejemplo 1 se puede formar la siguiente tabla:

$$S = xy$$

y \ x	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

En la tabla el valor de la función S se encuentra en la intersección de los renglones y columnas correspondientes a los valores buscados de x e y.

Si la dependencia funcional $z = f(x, y)$ resulta de las mediciones de la magnitud z durante el estudio experimental de un fenómeno, obtenemos la tabla en que z se determina como función de dos variables. En este caso, la función se da sólo mediante la tabla.

La función de dos variables igual que la función de una sola variable puede no estar definida para todos los valores arbitrarios de x e y.

Definición 2. El conjunto de los pares (x, y) de los valores de x e y, para los cuales está definida la función $z = f(x, y)$, se llama *dominio de definición* o *dominio de existencia* de la función.

El dominio de existencia de una función puede ser interpretado geométricamente. Si cada par de valores, x e y, lo representamos mediante un punto $M(x, y)$ en el plano Oxy, el dominio de definición de la función será representado por el conjunto de puntos en este plano. Llamemos también a este conjunto de puntos, dominio de definición de la función. En particular, todo el plano Oxy puede ser este dominio. En lo ulterior los dominios de definición que estudiaremos estarán constituidos por las *partes del plano limitadas por unas líneas*. La línea que limita el dominio dado se llama *frontera* de este dominio. Los puntos del dominio que no pertenecen a la frontera se llaman puntos *interiores* del dominio. Todo dominio integrado solamente de puntos interiores se llama dominio *abierto*.

Un dominio que incluye también los puntos de la frontera se llama dominio *cerrado.*

El dominio se llama *acotado*, si existe una magnitud constante C tal que la distancia entre todo punto M del dominio y el origen de coordenadas sea menor que C: $|OM| < C$.

Ejemplo 5. Hallar el dominio natural de definición de la función

$$z = 2x - y.$$

La expresión analítica $2x - y$ tiene sentido para todos los valores de x e y. Por consiguiente, el dominio natural de definición de esta función coincide con todo el plano Oxy.

Ejemplo 6.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Para que z tenga un valor real es preciso que el número subradical no sea negativo, es decir, x e y deben satisfacer a la desigualdad:

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \quad ó \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Todos los puntos $M(x, y)$, cuyas coordenadas satisfacen a la desigualdad

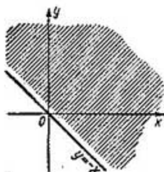


Fig. 165

indicada se sitúan dentro del círculo de radio 1 y centro ubicado en el origen de coordenanadas, así como en la frontera de este círculo.

Ejemplo 7.

$$z = \ln (x + y).$$

Como los logaritmos están determinados sólo para los números positivos, debe existir obligatoriamente la desigualdad:

$$x + y > 0 \quad ó \quad y > -x.$$

El dominio natural de definición de la función z es por consiguiente, el semiplano situado por arriba de la recta $y = -x$, excluyendo la propia recta (fig. 165).

Ejemplo 8. El área S de un triángulo es una función de la base x y la altura y:

$$S = \frac{xy}{2}.$$

El dominio de definición de esta función, es evidentemente el dominio $x > 0$, $y > 0$ (puesto que la base y la altura del triángulo pueden ser expresadas solamente por números positivos). Notemos, que el dominio de definición de la función examinada no coincide con el dominio natural de definición de la expresión analítica, que determina a esta función, puesto que el dominio natural de definición de la expresión $\frac{xy}{2}$ ocupa, evidentemente, todo el plano Oxy.

La definición de función de dos variables, puede extenderse fácilmente al caso de tres y más variables.

Definición 3. Si a todo conjunto estudiado de valores de las variables $x, y, z, \ldots, u, t$ corresponde un valor determinado de la variable w, entonces esta última es *función de las variables independientes* $x, y, z, \ldots, u, t$, es decir: $w = F(x, y, z, \ldots, u, t)$ o $w = f(x, y, z, \ldots, u, t)$, etc.

Análogamente al caso de una función de dos variables, existe el dominio de definición de la función de tres, cuatro y más variables.

Por ejemplo, el dominio de definición de una función de tres variables es un conjunto de ternas de números (x, y, z).

Observemos que cada terna de números define un punto $M(x, y, z)$ en el espacio $Oxyz$. Por tanto, el dominio de definición de una función de tres variables es un cierto conjunto de puntos en el espacio.

De manera análoga se puede determinar el dominio de difinición de una función de cuatro variables $u = f(x, y, z, t)$, como un sistema de los conjuntos de cuatro números (x, y, z, t).

Sin embargo, es imposible dar una simple determinación geométrica del dominio de definición de la función de cuatro o mayor cantidad de variables.

La función de tres variables analizada en el ejemplo 2, está definida para todos los valores de x, y, z. La función de cuatro variables está analizada en el ejemplo 4.

Ejemplo 9.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}.$$

Aquí, w es una función de cuatro variables x, y, z, u, definida para los valores de las variables que satisfacen a la correlación:

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geq 0.$$

§ 2. REPRESENTACION GEOMETRICA DE UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

Sea la función:

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

definida en el dominio G del plano Oxy (este dominio puede ocupar, en particular, todo el plano), y $Oxyz$, un sistema de coordenadas

cartesianas en el espacio (fig. 166). En cada punto (x, y) del dominio G levantemos una perpendicular al plano Oxy y marquemos en ésta un segmento igual a $f(x, y)$. Así obtenemos en el espacio un punto P de coordenadas $x, y, z = f(x, y)$.

El lugar geométrico de los puntos P, cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación (1), se llama gráfica de la función de dos variables.

Del curso de Geometría analítica sabemos que la ecuación (1) determina una superficie en el espacio. Así la gráfica de una función

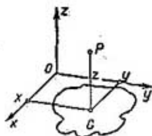


Fig. 166

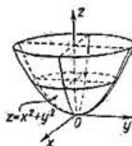


Fig. 167

de dos variables es una superficie cuya proyección sobre el plano Oxy, es el dominio de definición de esta función. Cada perpendicular al plano Oxy corta la superficie $z = f(x, y)$ no más que en un solo punto.

Ejemplo. Por la Geometría analítica sabemos que la gráfica de la función $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide de revolución (fig. 167).

Observación. Es imposible dar la representación geométrica en el espacio de la gráfica de una función de tres o más variables.

§ 3. INCREMENTO PARCIAL Y TOTAL DE LA FUNCION

Examinemos la curva PS de intersección de la superficie

$$z = f(x, y)$$

con el plano $y = const$, paralelo al plano Oxz (fig. 168).

Puesto que y es constante en todos los puntos del plano indicado, z variará a lo largo de la curva PS sólo en función de x. Demos a la variable independiente x un incremento Δx, entonces el incremento correspondiente de z recibirá el nombre de *incremento parcial de z respecto a x* que designemos con el símbolo $\Delta_x z$ (el segmento SS' en la figura 168), así que:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \qquad (1)$$

Análogamente, si x es constante y damos a y un incremento Δy, el incremento correspondiente de z recibirá el nombre de *incremento*

parcial de z respecto a y que designemos con el símbolo $\Delta_y z$ (el segmento TT' en la figura 168):

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - (f(x, y). \qquad (2)$$

La función recibe el incremento $\Delta_y z$ «a lo largo de la curva» de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = const$, paralelo al plano Oyz.

Por último, si damos simultáneamente un incremento Δx a la variable x y un incremento Δy a la variable y obtenemos el incremento correspondiente de z, Δz, que se llama *incremento total de la función z* y que se determina por la fórmula:

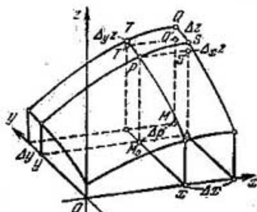


Fig. 168

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (3)$$

El incremento Δz está representado por el segmento QQ' en la figura 168.

Notemos que, en general, el incremento total no es igual a la suma de incrementos parciales, es decir, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Ejemplo: $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\, y - xy = y\Delta x,$$
$$\Delta_y z = x\,(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)\,(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Para $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$, tenemos: $\Delta_x z = 0{,}4$, $\Delta_y z = 0{,}3$, $\Delta z = 0{,}76$.

De manera semejante se determinan los incrementos parciales y total de la función de cualquier número de variables. Así, para una función de tres variables $u = f(x, y, t)$ tenemos:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$
$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

§ 4. CONTINUIDAD DE LA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Introduzcamos un concepto auxiliar muy importante, que es la vecindad de un punto dado.

Se llama *vecindad* del punto M_0 (x_0, y_0) de radio r al conjunto de todos los puntos (x, y), que satisfacen a la desigualdad: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$, es decir, el conjunto de todos los

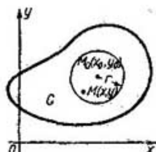


Fig. 169

puntos que se encuentran dentro de un círculo de centro M_0 (x_0, y_0) y radio r.

Cuando decimos que la función $f(x, y)$ tiene cierta propiedad «cerca del punto (x_0, y_0)», o «en la vecindad del punto (x_0, y_0)», esto significa que existe un círculo de centro en el punto (x_0, y_0) de tal manera que en todos los puntos del mismo se cumple la propiedad dada de la función.

Antes de pasar al estudio de la continuidad de una función de varias variables, examinemos el concepto de límite de la función le varias variables*). Sea dada la función:

$$z = f(x, y),$$

definida en un cierto dominio G del plano Oxy.

Examinemos cierto punto M_0 (x_0, y_0) que se encuentra en el interior, o en la frontera del dominio G (fig. 169).

Definición 1. Si para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número $r > 0$ tal que para todos los puntos $M(x, y)$, cuando cada punto $M(x, y)$ tiende a M_0 (x_0, y_0), se cumple la desigualdad $\overline{MM_0} < r$, entonces el número A se llama *límite* de la función $f(x, y)$ y tiene lugar la desigualdad:

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

*) En adelante estudiaremos, principalmente, las funciones de dos variables, puesto que el examen de las funciones de tres y más variables no agrega ningún elemento nuevo y sólo dificulta adicionalmente el problema desde el punto de vista práctico.

Si el número A es el límite de la función $f(x, y)$ cuando $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, se escribe:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Definición 2. Sea $M_0(x_0, y_0)$ el punto que pertenece al dominio de definición de la función $f(x, y)$. Se dice que la función $z = f(x, y)$ es *continua en el punto* $M_0(x_0, y_0)$, si se cumple la igualdad:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{1}$$

cuando el punto $M(x, y)$ tiende arbitrariamente al punto $M_0(x_0, y_0)$, permaneciendo en el interior del dominio de definición de la función.

Si ponemos $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, entonces la ecuación (1) se puede escribir así:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{1'}$$

ó

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{1''}$$

Ponemos $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (véase fig. 168). Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, $\Delta\rho \to 0$; recíprocamente, si $\Delta\rho \to 0$, entonces $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

La expresión encerrada entre corchetes en la igualdad (1″) es el incremento total Δz de la función z. Por consiguiente, se puede escribir la igualdad (1″) en la forma:

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0. \tag{1'''}$$

Una función, continua en cada punto de un cierto dominio, se llama *continua en este dominio.*

Si la condición (1) no se cumple en cierto punto $N(x_0, y_0)$ éste se llama punto de discontinuidad de la función $z = f(x, y)$. Demos algunos ejemplos en que la condición (1′) no se cumple: 1) $z = f(x, y)$ está definida en todos los puntos de cierta vecindad del punto $N(x_0, y_0)$, excepto el mismo punto $N(x_0, y_0)$; 2) la función $z = f(x, y)$ está definida en todos los puntos de una vecindad del punto $N(x_0, y_0)$, pero no existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$; 3) la función está definida en todos los puntos de la vecindad $N(x_0, y_0)$ y existe el límite: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$,

pero

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0).$$

Ejemplo 1. La función

$$z = x^2 + y^2$$

es continua para todos los valores de x e y, es decir, en cada punto del plano Oxy.

En efecto, cualesquiera que sean los números x e y, Δx y Δy, tenemos:

$$\Delta z = [(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2] - [x^2 + y^2] = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

por tanto,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Demos ahora un ejemplo de la función discontinua.

Ejemplo 2. La función

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

está definida en todos los puntos, excepto en el punto $x = 0$, $y = 0$ (fig. 170, 171).

Examinemos los valores que toma z en los puntos situados sobre la recta $y = kx$ ($k =$ const). Es evidente que para todos los puntos de la recta:

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} = \text{const},$$

es decir, sobre cada recta que pasa por el origen de coordenadas, la función z tiene un valor constante, que depende del coeficiente angular k de esta recta.

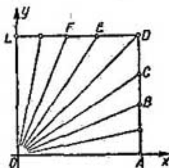


Fig. 170

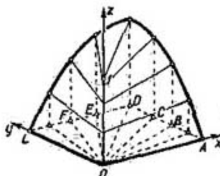


Fig. 171

Por eso el valor límite de la función z depende del camino que recorra el punto (x, y) cuando este punto (x, y) en el plano Oxy tiende al origen de coordenadas, lo que significa que la función $f(x, y)$ no tiene límite. Por consiguiente, la función es discontinua en este punto. No se puede hacer una determinación adicional de esta función en el origen de coordenadas para convertirla en continua. Es fácil ver, por otra parte, que en todos los demás puntos esta función es continua.

Indiquemos sin demostración algunas importantes propiedades de la función de varias variables, continua en el dominio cerrado y acotado. Estas propiedades son semejantes a las de la función de una variable y continua en el segmento (véase § 10, cap. II).

Propiedad 1. Si una función $f(x, y, \ldots)$ está definida y es continua en el dominio D cerrado acotado, entonces en este dominio existe por lo menos un punto $N(x_0, y_0, \ldots)$ tal, que para todos los demás puntos del dominio se cumpla la correlación:

$$f(x_0, y_0, \ldots) \geqslant f(x, y, \ldots),$$

y existe por lo menos un punto $\bar{N}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ tal que para todos los demás puntos del dominio se cumpla la correlación:

$$f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) \leqslant f(x, y, \ldots).$$

El valor de la función $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ se llama valor máximo y $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \ldots) = m$ se llama valor mínimo de la función $f(x, y, \ldots)$ en el dominio D. Esa propiedad también se puede formular de otro modo. Una función continua en un dominio D cerrado y acotado alcanza por lo menos una vez el valor máximo M y una vez el valor mínimo m.

Propiedad 2. Si una función $f(x, y, \ldots)$ es continua en un dominio D cerrado y acotado, siendo M y m los valores máximo y mínimo de la función en el dominio mencionado, entonces para cualquier número μ, que satisface a la condición $m < \mu < M$, existirá en el dominio un punto $N^*(x_0^*, y_0^*, \ldots)$ tal que se cumpla la igualdad:

$$f(x_0^*, y_0^*, \ldots) = \mu.$$

Corolario de la propiedad 2.

Si la función $f(x, y, \ldots)$ es continua en un dominio cerrado y acotado y toma valores tanto positivos como negativos, existirán en el interior del dominio unos puntos tales en los que la función $f(x, y, \ldots)$ se anula.

§ 5. DERIVADAS PARCIALES DE LA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Definición. El límite de la razón del incremento parcial $\Delta_x z$ respecto a x, en relación al incremento Δx, cuando Δx tiende a cero se llama *derivada parcial respecto a x* de la función $z = f(x, y)$.

La derivada parcial respecto a x de la función $z = f(x, y)$ se designa por uno de los símbolos siguientes:

$$z'_x; \quad f'_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De tal modo, según la definición:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Análogamente, la *derivada parcial* respecto a y de la función $z = f(x, y)$ se determina como el límite de la razón del incremento parcial de la función $\Delta_y z$ respecto a y, en relación al incremento Δy, cuando Δy tiende a cero. La derivada parcial respecto a y se designa por uno de los símbolos siguientes:

$$z'_y; \quad f'_y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Así,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Observemos que $\Delta_x z$ se calcula manteniéndose y invariable y $\Delta_y z$, manteniéndose x invariable; se llama *derivada parcial de la función* $z = f(x, y)$, *respecto a* x, a la derivada de esta función respecto a x, calculada en la suposición de que y es constante. Se llama *derivada parcial de la función* $z = f(x, y)$, *respecto a* y, a la derivada de esta función respecto a y, calculada en la suposición de que x es constante.

De la definición formulada se deduce que las reglas para calcular las derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una variable; es preciso, solamente, tener en cuenta, respecto a qué variable se busca la derivada.

Ejemplo 1. Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función $z = x^2 \operatorname{sen} y$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Ejemplo 2.

$$z = x^y.$$

Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Las derivadas parciales de una función de cualquier número de variables se hallan de manera análoga. Por ejemplo, si tenemos la función u de cuatro variables x, y, z, t:

$$u = f(x, y, z, t),$$

entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}, \quad \text{etc.}$$

Ejemplo 3.

$$u = x^2 + y^2 + xtz^3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3.$$

§ 6. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

Sea

$$z = f(x, y)$$

una ecuación de la superficie representada en la figura 172.

Tracemos el plano $x = \text{const}$. La intersección de este plano con la superficie determina la curva PT. Examinemos en el plano Oxy un punto $M(x, y)$ para x dado. Al punto M le corresponde el punto $P(x, y, z)$, de la superficie $z = f(x, y)$. Manteniendo x invariable, demos a la variable y un incremento $\Delta y = MN = PT'$. La función z recibirá el incremento $\Delta_y z = TT'$ [al punto $N(x, y + \Delta y)$ corresponde el punto $T(x, y + \Delta y, z + \Delta_y z)$ de la superficie $z = f(x, y)$].

La razón $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ es igual a la tangente del ángulo formado por la *secante* PT con la dirección positiva del eje Oy:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg} \widehat{TPT'}.$$

Por consiguiente, el límite:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

es igual a la tangente del ángulo β formado por la línea tangente PB a la curva PT en el punto P con dirección positiva del eje Oy:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

Por tanto, el valor numérico de la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ es igual

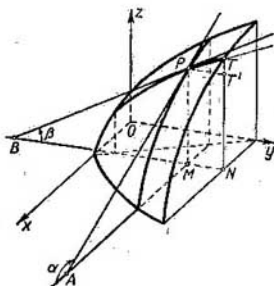


Fig. 172

a la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente a la curva definida por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = const.$

De modo semejante el valor numérico de la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ es igual a la tangente del ángulo α formado por la línea tangente a la curva definida por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = const.$

§ 7. INCREMENTO TOTAL Y DIFERENCIAL TOTAL

Según la definición de incremento total de la función $z = f(x, y)$, tenemos (§ 3, cap. VIII):

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (1)$$

Supongamos que la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas en el punto estudiado (x, y).

Expresemos Δz mediante las derivadas parciales. Sumando $f(x, y + \Delta y)$ al segundo miembro de la ecuación (1) y restando

esta expresión, tenemos:

$$\Delta z = [f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y)] + [f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)]. \quad (2)$$

El segundo sumando,

$$f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y),$$

comprendido entre corchetes, puede considerarse como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable y (el valor de x permanece constante). Aplicando el teorema de Lagrange a esta diferencia, tenemos

$$f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) = \Delta y \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y}, \quad (3)$$

donde $\bar{y}$ está comprendida entre y e $y+\Delta y$.

Del mismo modo, el primer sumando de la ecuación (2) puede ser considerado como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable x (el segundo argumento permanece constante e igual a $y+\Delta y$). Aplicando a esta diferencia el teorema de Lagrange, tenemos:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x}, \quad (4)$$

donde $\bar{x}$ está comprendida entre

$$x \text{ y } x+\Delta x.$$

Introduciendo las expresiones (3) y (4) en la ecuación (2), obtenemos:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y}. \quad (5)$$

Según la hipótesis, las derivadas parciales son continuas, de donde:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

puesto que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ están comprendidas primero entre x y $x+\Delta x$, y segundo, entre y e $y+\Delta y$, entonces $\bar{x}$ e $\bar{y}$ tienden a x e y, respectivamente, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Por consiguiente se puede

escribir las ecuaciones (6) en la forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x}&=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}+\gamma_1,\\ \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y}&=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}+\gamma_2,\end{aligned}\right\}\qquad(6')$$

donde las magnitudes γ_1 y γ_2 tienden a cero, cuando Δx y Δy tienden a cero (es decir, cuando $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$).

En virtud de las igualdades (6') la expresión (5) tomará la forma:

$$\Delta z=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y.\qquad(5')$$

La suma de los dos últimos términos del segundo miembro es una infinitesimal de orden superior con relación a $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. En efecto, la razón $\frac{\gamma_1\Delta x}{\Delta\rho}\to 0$ para $\Delta\rho\to 0$ puesto que γ_1 es una infinitesimal, y $\frac{\Delta x}{\Delta\rho}$, una magnitud acotada $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right|\leqslant 1\right)$. De modo semejante se comprueba que $\frac{\gamma_2\Delta y}{\Delta\rho}\to 0$.

La suma de los dos primeros términos es una expresión lineal respecto a Δx y Δy. Cuando $f'_x(x,\ y)\neq 0$ y $f'_y(x,\ y)\neq 0$, esta expresión es la parte principal del incremento, diferenciándose de Δz en una infinitesimal de orden superior con relación a

$$\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Definición. La función $z=f(x,\ y)$, se llama *derivable en el punto dado* $(x,\ y)$, si su incremento total $(\Delta_y z)$ en este punto puede ser presentado en forma de una suma de dos términos entre los cuales el primero es una expresión lineal respecto a Δx y Δy, y el segundo, una infinitesimal de orden superior con relación a $\Delta\rho$. La parte lineal del incremento se llama *diferencial total* y se designa por el símbolo dz o df.

De la igualdad (5') se deduce que, si la función $f(x,\ y)$ tiene derivadas parciales continuas en el punto dado, entonces la función es derivable en este punto y su diferencial total es

$$dz=f'_x(x,\ y)\,\Delta x+f'_y(x,\ y)\,\Delta y.$$

Podemos escribir la igualdad (5') en la forma:

$$\Delta z=dz+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y,$$

y con la precisión de hast ainfinitesimales de orden superior con relación a $\Delta\rho$ se puede escribir la siguiente igualdad *aproximada*:

$$\Delta z \approx dz.$$

Los incrementos Δx y Δy de las variables independientes se llaman *diferenciales* de las variables independientes x e y y se designan respectivamente por dx y dy. Entonces, la expresión de la diferencial total toma la forma:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Por consiguiente, si la función $z = f(x, y)$ tiene las derivadas parciales continuas, ésta es derivable en el punto (x, y) y su diferencial total es igual a la suma de los productos de las derivadas

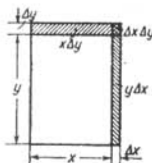


Fig. 173]

parciales, multiplicadas por las diferenciales de las variables independientes correspondientes.

Ejemplo 1. Hallar la diferencial total y el incremento total de la función $z = xy$ en el punto (2; 3), para $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

Solución.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\, \Delta y,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y\, dx + x\, dy = y\Delta x + x\Delta y.$$

Por consiguiente,

$$\Delta z = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,72;$$

$$dz = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7.$$

La figura 173 ilustra este ejemplo 1.

Los razonamientos y definiciones anteriores pueden extenderse, de modo correspondiente, a las funciones de cualquier número de argumentos.

Sea $w = f(x, y, z, u, \ldots, t)$, una función de cualquier número de variables en la que todas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t}$ son continuas en el punto $(x, y, z, u, \ldots, t)$, la expresión:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

será la parte principal del incremento total de la función y se llamará diferencial total. Del modo semejante que en el caso de una función de dos variables se puede demostrar que la diferencia $\Delta w - dw$ es una infinitesimal de orden superior con relación a $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y^2) + \ldots + (\Delta t)^2}$.

Ejemplo 2. Hallar la diferencial total de la función $u = e^{x^2+y^2} \operatorname{sen}^2 z$, de tres variables x, y, z.

Solución. Observando que las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \operatorname{sen}^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2} 2y \operatorname{sen}^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2} 2 \operatorname{sen} z \cos z = e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} 2z$$

son continuas para todos los valores de x, y, z, tenemos:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial y}{\partial z} dz = e^{x^2+y^2} (2x \operatorname{sen}^2 z \, dx + 2y \operatorname{sen}^2 z \, dy + \operatorname{sen} 2z \, dz).$$

§ 8. APLICACION DE LA DIFERENCIAL TOTAL PARA CALCULOS APROXIMADOS

Supongamos que la función $z = f(x, y)$ es derivable en el punto (x, y). Hallamos el incremento total de esta función:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

de donde:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \tag{1}$$

Tenemos ya la fórmula aproximada:

$$\Delta z \approx dz \tag{2}$$

donde:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \tag{3}$$

Sustituyendo Δz en la fórmula (1) por la expresión desarrollada para dz, obtenemos la fórmula aproximada:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) \approx f(x,\ y) + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\Delta y, \quad (4)$$

en la que el error se expresa en unas infinitesimales de orden superior respecto a Δx y Δy.

Mostremos cómo se usan las fórmulas (2) y (4) para realizar cálculos aproximados.

Problema. Calcular el volumen del material necesario para fabricar un vaso cilíndrico de las dimensiones siguientes (fig. 174):
radio interior del cilindro, R;
altura interior del cilindro, H;
espesor de las paredes y del fondo del vaso, k.

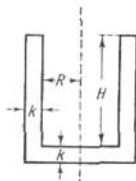


Fig. 174

Solución. Demos dos soluciones del problema: la exacta y la aproximada

a) **Solución exacta.** El volumen buscado v es igual a la diferencia entre los volúmenes de los cilindros exterior e interior. Como el radio del cilindro exterior es $R+k$, y la altura es $H+k$, tenemos:

$$v = \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 H,$$

ó

$$v = \pi(2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \quad (5)$$

b) **Solución aproximada.** Designemos por f el volumen del cilindro interior; entonces, $f = \pi R^2 H$. Esta es una función de dos variables, R y H. Si aumentamos en k las magnitudes R y H, la función f recibirá el incremento Δf, el cual constityue el volumen buscado v, es decir, $v = \Delta f$.

En virtud de la expresión (1), tenemos una igualdad aproximada:

$$v \approx df$$

o sea

$$v \approx \frac{\partial f}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H.$$

Puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial R}=2\pi RH,\quad \frac{\partial f}{\partial H}=\pi R^2,\quad \Delta R=\Delta H=k,$$

tenemos:

$$v\approx\pi(2RHx+R^2k). \tag{6}$$

Comparando los resultados (5) y (6) vemos que éstos se diferencian en una magnitud $\pi(Hk^2+2Rk^2+k^3)$, compuesta solamente por términos que contienen k al cuadrado y al cubo.

Apliquemos estas fórmulas en los ejemplos numéricos.

Sean $R=4$ cm, $H=20$ cm, $k=0{,}1$ cm. Aplicando (5), obtenemos el volumen exacto:

$$v=\pi(2\cdot4\cdot20\cdot0{,}1+4^2\cdot0{,}1+20\cdot0{,}1^2+2\cdot4\cdot0{,}1^2+0{,}1^3)=17{,}881\pi.$$

Aplicando (6), obtenemos el volumen aproximado:

$$v\approx\pi(2\cdot4\cdot20\cdot0{,}1+4^2\cdot0{,}1)=17{,}6\pi.$$

Por consiguiente, mediante la fórmula aproximada (6) obtenemos una respuesta con un error inferior a $0{,}3\pi$, lo que constituye $100\cdot\frac{0{,}03\pi}{17{,}881\pi}\,\%$, es decir, menos del 2% del valor medido.

§ 9. UTILIZACION DE LA DIFERENCIAL PARA EVALUAR EL ERROR DE CALCULO

Sea $u=f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$, una función de las variables x, y, $z, \ldots, t$.

Supongamos que la evaluación de los valores numéricos de las magnitudes $x, y, z, \ldots, t$ se hace con cierto error correspondiente a Δx, $\Delta y, \ldots, \Delta t$. En este caso, el valor de u, calculado a base de los valores aproximados de los argumentos, será también determinado con cierto error Δu

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, z+\Delta z, t+\Delta t)-f(x, y, z, \ldots, t).$$

Cuando los errores Δx, $\Delta y, \ldots, \Delta t$ son conocidos, podemos evaluar también el error Δu.

Siendo los valores absolutos de las magnitudes Δx, $\Delta y, \ldots$ $\ldots, \Delta t$, suficientemente pequeños podemos sustituir el incremento total por la diferencial total y obtener la igualdad aproximada:

$$\Delta u\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\ \ldots\ +\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t.$$

Aquí los valores de derivadas parciales y errores de los argumentos pueden ser tanto positivos como negativos.

Sustituyéndolos por los valores absolutos, obtenemos la desigualdad:

$$|\Delta u|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|+\ \ldots\ +\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t|. \tag{1}$$

Designando por $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$, . . ., $|\Delta^* u|$ los errores absolutos máximos de las magnitudes correspondientes (límites de los valores absolutos de los errores) se puede, evidentemente, admitir:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta^* t|. \qquad (2)$$

Ejemplos

1. Sea: $u = x + y + z$, entonces:

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| \div |\Delta^* z|.$$

2. Sea: $u = x - y$, entonces:

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y|.$$

3. Sea: $u = xy$, entonces:

$$|\Delta^* u| = |x|\,|\Delta^* y| + |y|\,|\Delta^* x|.$$

4. Sea: $u = \frac{x}{y}$, entonces:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{1}{y}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta^* y| = \frac{|y|\,|\Delta^* x| + |x|\,|\Delta^* y|}{y^2}.$$

5. Sean la hipotenusa c y el cateto a del triángulo rectángulo ABC determinados con los errores absolutos máximos: $|\Delta^* c| = 0,2$; $|\Delta^* a| = 0,1$. Tenemos $c = 75$ y $a = 32$ respectivamente. Determinar el ángulo A por la fórmula sen $A = \frac{a}{c}$ y el error absoluto máximo $|\overline{\Delta A}|$, al calcular el ángulo A.

Solución. Sen $A = \frac{a}{c}$, $A = \arcsen \frac{a}{c}$; por tanto:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Según la fórmula (2), tenemos:

$$|\overline{\Delta A}| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,1 + \frac{32}{75\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,2 =$$

$$= 0,00275 \text{ radianes} = 9'38''.$$

De tal modo:

$$A = \arcsen \frac{32}{75} \pm 9'38''.$$

6. Determinado el cateto $b = 121,56$ m y el ángulo $A = 25°21'40''$ de un triángulo rectángulo ABC; los errores absolutos máximos cometidos en el curso de la evaluación de estas magnitudes son respectivamente $|\Delta^* b| = 0,05$ m y $|\Delta^* A| = 12''$.

Determinar el error absoluto máximo cometido en el cálculo del cateto a por la fórmula $a = b\,\mathrm{tg} A$.

Solución: Según la fórmula (2):

$$|\Delta^* a| = |\operatorname{tg} A|\,|\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}\,|\Delta^* A|.$$

Sustituyendo los valores correspondientes (y expresando $|\Delta^* A|$ en radianes), tenemos:

$$|\Delta^* a| = \operatorname{tg} 25^\circ 21' 40'' \cdot 0{,}05 + \frac{121{,}56}{\cos^2 25^\circ 21' 40''}\,\frac{12}{206\,265} =$$

$$= 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324 \text{ м}.$$

La razón del error Δx de cierta magnitud respecto al valor aproximado de x se llama *error relativo* de esta magnitud. Designémoslo por δx:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

La razón del error absoluto máximo respecto al valor absoluto de x se llama *error relativo máximo* de la magnitud x y se designa por $|\delta^* x|$:

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \tag{3}$$

Para evaluar el error relativo máximo de la función u, dividamos los miembros de la igualdad (2) por $|u| = |f(x, y, z, \ldots, t)|$ respectivamente:

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right| |\Delta^* t|. \tag{4}$$

Pero,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x}\ln|f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y}\ln|f|; \ \ldots; \ \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t}\ln|f|.$$

Por consiguiente la igualdad (3) se puede escribir en la forma:

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right| |\Delta^* y| + \ldots$$

$$\ldots + \left|\frac{\partial}{\partial t}\ln|f|\right| |\Delta^* t| \ldots, \tag{5}$$

o, más brevemente:

$$|\delta^* u| = \left|\Delta^* \ln|f|\right|. \tag{6}$$

De las fórmulas (3) y (5) se deduce que el error relativo máximo de una función es igual al error absoluto máximo del logaritmo de esta función.

De la fórmula (6) obtenemos las reglas utilizadas en los cálculos aproximados.

1. Sea $u = xy$. Utilizando los resultados del ejemplo 3, tenemos:

$$|\delta^* u| = \frac{|x||\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|y||\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

es decir, el error relativo máximo de un producto es igual a la suma de los errores relativos máximos de los factores.

2. Sea $u = \frac{x}{y}$, utilizando los resultados del ejemplo 4, tenemos:

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Observación: Del ejemplo 2 se deduce que si $u = x - y$, tenemos:

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Si los valores de x e y son cercanos entre sí puede ocurrir que $|\delta^* u|$ sea muy grande en comparación con la magnitud buscada $x - y$. Esta circunstancia debe tenerse en cuenta durante los cálculos.

Ejemplo 7. El período de oscilación de un péndulo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

donde: l es el largo del péndulo; g, la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

Calcular el error relativo de la determinación de T por la fórmula enunciada, poniendo: $\pi \approx 3{,}14$ (con la precisión de hasta 0,005), $l = 1$m (con la precisión de hasta 0,01m), $g = 9{,}8$ m/seg² (con la precisión hasta de 0,02 m/seg²).

Solución: El error relativo máximo según la fórmula (6) será:

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \ln T|.$$

Pero,

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2} \ln l - \frac{1}{2} \ln g.$$

Calculemos $|\Delta^* \ln T|$. Teniendo en cuenta que: $\pi \approx 3{,}14$, $\Delta^* \pi = 0{,}005$, $l = 1$ m, $\Delta^* l = 0{,}01$ m, $g = 9{,}8$ m/seg², $\Delta^* g = 0{,}02$ m/seg², obtenemos:

$$\Delta^* \ln T = \frac{\Delta^* \pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}0076.$$

Así, el error relativo máximo es:

$$\delta^* T = 0{,}0076 = 0{,}76\%.$$

§ 10. DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA. DERIVADA TOTAL

Supongamos que en la ecuación

$$z = F(u, v) \tag{1}$$

u y v son funciones de las variables independientes x e y:

$$u = \varphi(x, y); \; v = \psi(x, y). \tag{2}$$

En este caso z es una función compuesta de las variables x e y. Por supuesto, se puede expresar z directamente en función de x e y

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Sea

$$z = u^3v^3 + u + 1; \; u = x^2 + y^2; \; v = e^{x+y} + 1;$$

entonces,

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

Supongamos que las derivadas parciales de las funciones $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ son continuas respecto a todos sus argumentos y calculemos $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial z}{\partial x}$ a partir de las ecuaciones (1) y (2), sin recurrir a la igualdad (3).

Demos al argumento x un incremento Δx, manteniendo invariable el valor de y. En virtud de la ecuación (2), u y v recibirán incrementos $\Delta_x u$ y $\Delta_x v$ respectivamente.

Pero si u y v reciben los incrementos $\Delta_x u$ y $\Delta_x v$, la función $z = F(u, v)$ también recibirá el incremento Δz determinado por la fórmula (5′), § 7, cap. VIII:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Dividamos todos los términos de esta igualdad por Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Si $\Delta x \to 0$, también $\Delta_x u \to 0$ y $\Delta_x v \to 0$ (en virtud de la continuidad de las funciones u y v). Pero, en este caso γ_1 y γ_2 igualmente tienden a cero. Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = 0; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_2 = 0$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Si damos un incremento Δy a la variable y, conservando x invariable, obtenemos análogamente:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4'}$$

Ejemplo 2.

$$z=\ln(u^2+v);\quad u=e^{x+y^2},\quad v=x^2+y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Utilizando las fórmulas (4) y (4'), tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}(2uye^{x+y^2}+1).$$

Las fórmulas (4) y (4') se generalizan naturalmente para un mayor número de variables.

Por ejemplo, si $w=F(z, u, v, s)$ es una función de cuatro argumentos z, u, v, s, y cada uno de éstos depende de x e y, las fórmulas (4) y (4') toman la forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Si la función $z=F(x, y, u, v)$ es tal que las variables y, u, v dependen, a su vez, del argumento x:

$$y=f(x);\quad u=\varphi(x);\quad v=\psi(x),$$

entonces, z, en esencia, es función de una sola variable x, y se puede, por tanto, hallar la derivada $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Esta derivada se calcula por la primera de las fórmulas (5):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

pero, como y, u, v no dependen más que de una sola variable x, las derivadas parciales correspondientes son de hecho las derivadas ordinarias; además, $\frac{dx}{dx}=1$, por tanto:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{6}$$

La última se llama fórmula para el cálculo de la *derivada total* $\frac{dz}{dx}$ $\left(\text{a diferencia de la derivada } \textit{parcial } \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

Ejemplo 3.

$$z=x^2+\sqrt{y},\quad y=\operatorname{sen} x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}};\quad \frac{dy}{dx}=\cos x.$$

Según la fórmula (6) tenemos

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x=2x+\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\cos x.$$

§ 11. DERIVADA DE UNA FUNCION DEFINIDA IMPLICITAMENTE

Comencemos el análisis de este problema con el estudio de la función implícita de una sola variable*. Sea y una función de x definida por la ecuación

$$F(x, y)=0$$

comprobemos el teorema siguiente.

Teorema. *Sea y una función continua de x definida implícitamente por la ecuación*

$$F(x, y)=0$$

donde $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ son funciones continuas en cierto dominio D que contiene el punto (x, y), cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación (1); *además, en este punto $F'_y(x, y)\neq 0$. Entonces la función y de x tiene la derivada:*

$$y'_x=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

*) En el § 11 del capítulo III hemos resuelto el problema de derivación de las funciones implícitas de una variable. Hemos examinado algunos ejemplos, sin obtener la formula general para hallar la derivada de la función implícita. Tampoco hemos aclarado las condiciones de existencia de esta derivada.

Demostración. Supongamos que a un cierto valor de x corresponde un valor de la función y. Aquí

$$F(x, y) = 0.$$

Demos a la variable independiente x un incremento Δx. La función y recibe el incremento Δy, es decir, al valor $x + \Delta x$ del argumento le corresponde el valor $y + \Delta y$ de la función. En virtud de la ecuación $F(x, y) = 0$ tenemos:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Por tanto,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

El primer miembro de la última igualdad que es el incremento total de la función de dos variables, en virtud de la fórmula (5′) § 7 se puede escribir

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

donde γ_1 y γ_2 tienden a cero, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Como el primer miembro de la última expresión es igual a cero, se puede escribir

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0.$$

Dividamos la igualdad obtenida por Δx y calculemos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Aproximemos Δx a cero. Teniendo en cuenta que γ_1 y γ_2 también tienden a cero y que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, obtenemos como el límite:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (1)$$

Hemos demostrado la existencia de la derivada y'_x de la función definida implícitamente y hemos obtenido la fórmula para calcular esta derivada.

Ejemplo 1. La ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

define y como función implícita de x. Aquí:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Por consiguiente, según la fórmula (1):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Observemos que la ecuación dada define dos funciones distintas [puesto que a cada valor de x en el intervalo $(-1, 1)$ corresponden dos valores de y]; sin embargo, el valor hallado de y'_x es válido para ambas funciones.

Ejemplo 2. Sea la ecuación

$$e^y - e^x + xy = 0.$$

Aquí:

$$F(x, y) = e^y - e^x + xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Por tanto, según la fórmula (1) obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Examinemos ahora la ecuación del tipo

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (2)$$

Si a cada par de números x e y, pertenecientes a cierto dominio, le corresponden uno o varios valores de z que satisfacen a la ecuación (2), ésta define implícitamente una o varias funciones unívocas z de x e y.

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

define implícitamente dos funciones continuas z de x e y, que pueden expresarse explícitamente, resolviendo la ecuación respecto a z; en este caso obtenemos:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Hallamos las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función implícita z de x e y definida por la ecuación (2).

Para buscar $\frac{\partial z}{\partial x}$, supongamos que y es constante. Por eso, podemos utilizar aquí la fórmula (1), considerando z como una función de la variable independiente x. Por tanto:

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

De modo semejante hallamos:

$$z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Aquí es natural suponer que

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Del mismo modo se definen las funciones implícitas de cualquier número de variables y se calculan las derivadas parciales de las mismas.

Ejemplo 3.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Derivando esta función como si fuera explícita (resolviendo esta ecuación respecto a z), obtenemos el mismo resultado.

Ejemplo 4.

$$e^z + x^2y + z + 5 = 0.$$

Aquí

$$F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Observación: Todos los razonamientos del párrafo anterior los hemos realizado, suponiendo que la ecuación $F(x, y) = 0$ define cierta función de una variable $y = \varphi(x)$, y la ecuación $F(x, y, z) = 0$, define cierta función de dos variables $z = f(x, y)$. Indique-

mos sin demostración la condición que debe satisfacer la función $F(x, y)$ para que la ecuación $F(x, y) = 0$ defina la función uniforme $y = \varphi(x)$.

Teorema. *Sea la función $F(x, y)$, continua en la vecindad del punto (x_0, y_0) y que tenga derivadas parciales continuas, siendo $F'_y(x, y) \neq 0$; suponiendo también que $F(x_0, y_0) = 0$. Entonces existe una vecindad que comprende el punto (x_0, y_0) donde la ecuación $F(x, y) = 0$ define la función uniforme $y = \varphi(x)$.*

El teorema análogo se cumple también para las condiciones de existencia de la función implícita definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

Observación. Al deducir las reglas de derivación de las funciones implícitas, hemos aprovechado las condiciones que determinan la existencia de las funciones implícitas.

§ 12. DERIVADAS PARCIALES DE DIFERENTES ORDENES

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes.

Las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ son, en general, funciones de las variables x e y. Por eso, éstas también pueden tener derivadas parciales. Por consiguiente, las derivadas parciales de segundo orden de una función de dos variables, son *cuatro*, puesto que cada una de las funciones $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ puede ser derivada tanto respecto a x, como respecto a y.

Las derivadas parciales de segundo orden se designan así:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$; donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f''_{xy}(x, y)$; donde f se deriva primero respecto a x, luego el resultado se deriva respecto a y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{yx}(x, y)$; donde f se deriva primero respecto a y, luego el resultado se deriva respecto a x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$; donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a y.

Las derivadas de segundo orden se pueden derivar de nuevo, tanto respecto a x, como respecto a y; como resultado obtenemos

derivadas de tercer orden. Es evidente que serán ocho:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x\,\partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

En general, la *derivada parcial de n-ésimo orden* es la primera derivada de la derivada de $(n-1)$-ésimo orden. Por ejemplo, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p\,\partial y^{n-p}}$ es derivada de n-ésimo orden. Aquí, la función z está derivada, primero, p veces respecto a x y luego $n-p$ veces respecto a y.

De manera igual se definen las derivadas parciales de órdenes superiores para la función de cualquier número de variables.

Ejemplo 1. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial(x^2+3y^2)}{x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Ejemplo 2. Hallar $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$ y $\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}$, si $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 2ye^x + 6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2ye^x + 6xy^2; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} = 2ye^x + 6y^2.$$

Ejemplo 3. Hallar $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}$, si $u = z^2 e^{x+y^2}$.

Solución.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z} = 4yze^{x+y^2}.$$

Es natural plantear el problema: ¿si el resultado de derivación de la función de varias variables depende o no del orden de derivación respecto a distintas variables? Es decir, serían, por ejemplo, idénticamente iguales las derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

ó

$$\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial x\,\partial y\,\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t\,\partial x\,\partial y}, \quad \text{etc.}$$

Demos la respuesta en forma del teorema siguiente.

Teorema. *Si la función $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales f'_x, f'_y, f''_{xy} y f''_{yx} están definidas y son continuas en el punto $M(x, y)$ como también en cierta vecindad de este punto, entonces en este punto:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \qquad (f''_{xy} = f''_{yx}).$$

Demostración. Analicemos la expresión

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Si introducimos una función auxiliar $\varphi(x)$, determinada por la igualdad

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

se puede escribir A en la forma:

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Según la hipótesis, f'_x está definida en la vecindad del punto (x, y). Por consiguiente, $\varphi(x)$ es derivable en el segmento $(x, x + \Delta x)$, y aplicando el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}),$$

donde $\bar{x}$ está comprendida entre x y $x + \Delta x$.

Pero,

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

Puesto que f''_{xy} está definida en la vecindad del punto (x, y), f_x es derivable en el segmento $[y, y + \Delta y]$; por eso, aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia obtenida (respecto a la variable y), tenemos:

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde $\bar{y}$ está comprendida entre y e $y + \Delta y$.

Por tanto, la expresión primitiva para A es igual a

$$A = \Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1}$$

Al cambiar el orden de los términos medios, obtenemos:

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Introduzcamos la función auxiliar:

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Entonces:

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y).$$

Aplicando otra vez el teorema de Lagrange, tenemos:

$$A = \Delta y \psi' (\bar{\bar{y}})$$

donde $\bar{\bar{y}}$ está comprendida entre y e $y + \Delta y$.

Pero,

$$\psi' (\bar{\bar{y}}) = f'_y (x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y (x, \bar{\bar{y}}).$$

Aplicando una vez más el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$f'_y (x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y (x, \bar{\bar{y}}) = \Delta x f''_{yx} (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

donde $\bar{\bar{x}}$ está comprendida entre x y $x + \Delta x$.

Así, la expresión primitiva para A se puede escribir en la forma:

$$A = \Delta y \Delta x f''_{yx} (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}). \qquad (2)$$

Los primeros miembros de las igualdades (1) y (2) son iguales a A, por consiguiente son iguales también los segundos miembros, es decir,

$$\Delta x \Delta y f''_{xy} (\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y \Delta x f''_{xy} (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

de donde

$$f''_{xy} (\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx} (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

Pasando en esta ecuación al límite, cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, obtenemos:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy} (\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx} (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

Como las derivadas f''_{xy} y f''_{yx} son continuas en el punto (x, y), tenemos:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy} (\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy} (x, y) \text{ y } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx} (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f''_{yx} (x, y).$$

En definitiva:

$$f''_{xy} (x, y) = f''_{yx} (x, y)$$

y queda así demostrado el teorema.

El corolario del teorema demostrado es: si las derivadas parciales $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ y $\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$, son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}.$$

Un teorema análogo es válido para la función de cualquier número de variables.

Ejemplo 4. Hallar

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \text{ y } \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x}, \text{ si } u = e^{xy} \operatorname{sen} z.$$

Solución.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \operatorname{sen} z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = e^{xy} \operatorname{sen} z + xye^{xy} \operatorname{sen} z = e^{xy}(1+xy) \operatorname{sen} z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xy}(1+xy)\cos z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \operatorname{sen} z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = xe^{xy}\cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x} = e^{xy}\cos z + xye^{xy}\cos z = e^{xy}(1+xy)\cos z.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z\,\partial x}$$

(véase, además, los ejemplos 1 y 2 de este párrafo).

§ 13. SUPERFICIES DE NIVEL

Supongamos que en el espacio (x, y, z) existe un dominio D en el cual está dada la función

$$u = u(x, y, z). \tag{1}$$

Suele decirse en este caso que en el dominio D está dado el *campo escalar*. Si, por ejemplo, $u(x, y, z)$ designa la temperatura en el punto $M(x, y, z)$, se dice que está dado el campo escalar de temperaturas. Si el dominio D ha sido llenado con líquido o gas y la función $u(x, y, z)$ designa la presión, se trata del campo escalar de presiones, etc.

Examinemos los puntos del dominio D, donde la función $u(x, y, z)$ tiene un valor constante c:

$$u(x, y, z) = c. \tag{2}$$

El conjunto de estos puntos forma una superficie. Al tomar otro valor de c, obtenemos otra superficie. Estas superficies se llaman *superficies de nivel*.

Ejemplo 1. Sea

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

el campo escalar.

Las superficies de nivel serán:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

es decir, elipsoides cuyos semiejes son $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$.

Si u es función de dos variables x e y:

$$u = u(x, y),$$

las «superficies» de nivel serán ciertas líneas en el plano Oxy:

$$u(x, y) = c \tag{2'}$$

que se llaman *líneas de nivel*.

Si ponemos los valores de u a lo largo del eje Oz:

$$z = u(x, y),$$

las líneas de nivel en el plano Oxy serán proyecciones de las líneas que se obtienen en la intersección de la superficie $z = u(x, y)$ con

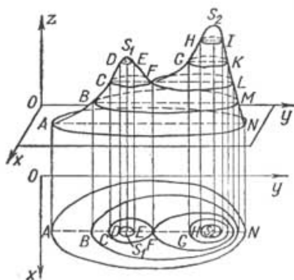


Fig. 175

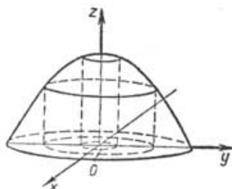


Fig. 176

los planos $z = c$ (fig. 175). Conociendo las líneas de nivel, es fácil estudiar el carácter de la superficie $z = u(x, y)$.

Ejemplo 2. Determinar las líneas de nivel de la función $z = 1 - x^2 - y^2$. Las líneas de nivel serán las líneas representadas por la ecuación $1 - x^2 - y^2 = c$. Estas son circunferencias de radio $\sqrt{1-c}$ (fig. 176). En particular, cuando $c = 0$, obtenemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

§ 14. DERIVADA SIGUIENDO UNA DIRECCION

Examinemos la función $u = u(x, y, z)$ y el punto $M(x, y, z)$ dados en el dominio D. Del punto M tracemos el vector S, cuyos cosenos directores son $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (fig. 177). Analicemos un punto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ sobre el vector S a una distancia Δs de su origen. Entonces:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Supongamos que la función $u(x, y, z)$ es continua y tiene derivadas continuas respecto a sus argumentos en el dominio D. Análogamente a lo hecho en el § 7, representemos el incremento total de la función así:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \qquad (1)$$

donde ε_1, ε_2 y ε_3 tienden a cero, cuando $\Delta s \to 0$. Dividamos todos

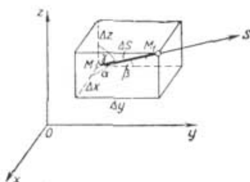


Fig. 177

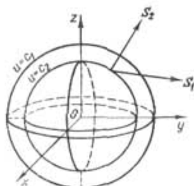


Fig. 178

los miembros de la igualdad (1) por Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \qquad (2)$$

Es evidente que

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Por tanto, la igualdad (2) se puede escribir en la forma:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma +$$
$$+ \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma. \qquad (3)$$

El límite de la razón $\frac{\partial u}{\partial s}$ para $\Delta s \to 0$ se llama *derivada de la función $u = u(x, y, z)$ en el punto (x, y, z), siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}$*, y se designa por $\frac{\partial u}{\partial s}$, es decir,

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \qquad (4)$$

De este modo, pasando al límite en la igualdad (3), obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5}$$

De la fórmula (5) se deduce que, conociendo las derivadas parciales, es fácil hallar la derivada siguiendo cualquier dirección $\boldsymbol{S}$. Las propias derivadas parciales se presentan como caso particular de la derivada según la dirección. Así por ejemplo, para $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos 0+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ejemplo. Sea la función

$$u=x^2+y^2+z^2.$$

Hallar la derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$, en el punto $M(1, 1, 1)$:

a) siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$;

b) siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Solución. a) Hallemos los cosenos directores del vector S_1:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}=\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Las derivadas parciales en el punto $M(1, 1, 1)$ son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=$$

Así,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}=2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}$$

b) Hallemos los cosenos directores del vector S_2:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

Observemos que

$$2\sqrt{3}>\frac{12}{\sqrt{14}} \text{ (fig. 178).}$$

§ 15. GRADIENTE

En cada punto del dominio D en que se da la función $u=u(x, y, z)$ determinemos un vector, cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son los valores de las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ de *esta función en el punto correspondiente:*

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Este vector se llama *gradiente* de la función $u(x, y, z)$. Se dice que en el dominio D está definido el *campo vectorial de gradientes.* Demostremos ahora el teorema que determina la relación entre el gradiente y la derivada siguiendo la dirección.

Teorema. *Sea el campo escalar $u=u(x, y, z)$ en el que está definido el campo de gradientes*

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

La derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$ siguiendo la dirección de un cierto vector $\boldsymbol{S}$ es igual a la proyección del vector grad u *sobre el vector $\boldsymbol{S}$.*

Demostración: Examinemos el vector unitario $\boldsymbol{S}^0$ que corresponde al vector $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}^0=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma.$$

Calculemos el producto escalar de los vectores grad u, y $\boldsymbol{S}^0$:

$$\operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{S}^0=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2}$$

El segundo miembro de la igualdad (2) es la derivada de la función $u(x, y, z)$ siguiendo la dirección del vector $\boldsymbol{S}$. Por consiguiente, se puede escribir:

$$\operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{S}^0=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

Si designamos por φ el ángulo entre los vectores grad u y S^0 (fig. 179), podemos escribir:

$$|\operatorname{grad} u|\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \tag{3}$$

o

$$\text{proyección}\cdot S^0 \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{4}$$

Queda así demostrado el teorema.

Partiendo del teorema demostrado, podemos establecer la relación entre el gradiente y la derivada en el punto dado siguiendo cualquier dirección. En el punto dado $M(x, y, z)$ construimos el vector

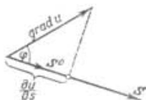


Fig. 179

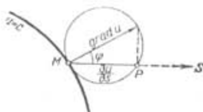


Fig. 180

grad u (fig. 180). Formemos una esfera en la cual el vector grad u es el diámetro. Tracemos el vector S, partiendo del punto M. Designemos por P el punto de intersección del vector S con la superficie de la esfera. Es evidente que $MP = |\operatorname{grad} u|\cos\varphi$, si φ es el ángulo entre las direcciones del gradiente y el segmento MP $\left(\text{siendo } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, es decir, $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$. Está claro que si el vector S toma la dirección contraria, la derivada cambia de signo, pero su valor absoluto permanece invariable.

Determinemos algunas propiedades del gradiente.

1) *La derivada en el punto dado, siguiendo la dirección del vector S, tiene el valor máximo, si la dirección del vector S coincide con la del gradiente. Este valor máximo de la derivada es igual a $|\operatorname{grad} u|$.*

Esta afirmación es válida lo que se deduce directamente de la igualdad (3); $\frac{\partial u}{\partial s}$ tiene el valor máximo, cuando $\varphi = 0$, en este caso:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|.$$

2) *La derivada, siguiendo la dirección del vector, tangente a la superficie de nivel, es igual a cero.*

Esta afirmación se deduce de la fórmula (3). En efecto, en este

caso:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi=0.$$

Ejemplo 1. Sea la función:

$$u=x^2+y^2+z^2,$$

a) Determinemos el gradiente en el punto M (1, 1, 1). La expresión del gradiente de la función dada en el punto arbitrario será:

$$\operatorname{grad} u=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}.$$

Por consiguiente,

$$(\operatorname{grad} u)_M=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}, \quad |\operatorname{grad} u|_M=2\sqrt{3}.$$

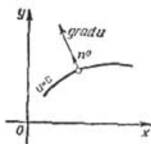


Fig. 181

b) Determinemos la derivada de la función u en el punto M (1, 1, 1) siguiendo la dirección del gradiente. Los cosenos directores del gradiente serán:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},$$

es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u|.$$

Observación. Si $u=u(x, y)$ es una función de dos variables el vector

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

está en el plano Oxy. Demostremos que *grad u es perpendicular a la línea de nivel* $u(x, y)=c$, la cual se halla en el plano Oxy y pasa por el punto correspondiente. En efecto, el coeficiente angular k_1 de la tangente a la línea de nivel $u(x, y)=c$ será igual a $k_1=-\frac{u'_x}{u'_y}$.

El coeficiente angular k_2 del gradiente es igual a $k_2=\frac{u'_y}{u'_x}$. Es evidente que $k_1k_2=-1$, lo que comprueba que nuestra afirmación es válida (fig. 181). La propiedad análoga del gradiente de una función de tres variables será establecida en el § 6 del capítulo IX.

Ejemplo 2. Hallar el gradiente de la función $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ (fig. 182) en el punto M (2, 4).

Solución. Aquí:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x\,|_M=2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{3}\,y\,|_M=\frac{8}{3}\,.$$

Por tanto,

$$\text{grad}\, u=2i+\frac{8}{3}\,j.$$

La ecuación de la línea de nivel (fig. 183) que pasa por el punto dado será:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{22}{3}\,.$$

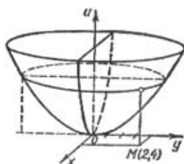


Fig. 182

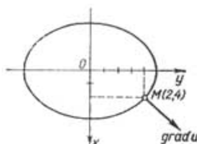


Fig. 183

§ 16. FORMULA DE TAYLOR PARA UNA FUNCION DE DOS VARIABLES

Supongamos que una función de dos variables

$$z=f\,(x,\; y)$$

es continua, lo mismo que todas sus derivadas parciales de orden hasta $(n+1)$ inclusive en cierta vecindad del punto $M\,(a,\; b)$. Entonces se puede representar la función de dos variables, al igual que se hizo en el caso de la función de una variable, (véase § 6, cap IV), como la suma de un polinomio de n-ésimo grado, desarrollado según las potencias enteras de $(x-a)$ e $(y-b)$ y un resto. Demostremos después que para $n=2$, esta fórmula tiene la forma:

$$f\,(x,\,y)=A_0+D\,(x-a)+E\,(y-b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\,[A\,(x-a)^2+2B\,(x-a)\,(y-b)+C\,(y-b)^2]+R_2, \quad (1)$$

donde los coeficientes A_0, D, E, A, B, C no dependen de x e y, mientras que el resto R_2 tiene una estructura análoga a la del término complementario de la fórmula de Taylor para una sola variable.

Apliquemos la fórmula de Taylor para la función $f\,(x,\,y)$ de una sola variable y, considerando x constante (hasta los términos de

segundo orden):

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y-b}{1} f'_y(x, b) +$$

$$+ \frac{(y-b)^2}{1\cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (2)$$

donde $\eta_1 = b + \theta_1 (y - b)$, $0 < \theta_1 < 1$. Utilizando la fórmula de Taylor, desarrollemos las funciones $f(x, b)$, $f'_y(x, b)$, $f''_{yy}(x, b)$ según las potencias enteras de $(x - a)$, hasta las derivadas mixtas de tercer orden inclusive:

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) +$$

$$+ \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (3)$$

donde $\xi_1 = x + \theta_2 (x - a)$, $\theta < \theta_2 < 1$;

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (4)$$

donde $\xi_2 = x + \theta_3 (x - a)$, $0 < \theta_3 < 1$;

$$f''_{yy}(x, b) = f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b), \quad (5)$$

donde $\xi_3 = x + \theta_4 (x - a)$; $0 < \theta_4 < 1$.

Introduciendo las expresiones (3), (4) y (5) en la fórmula (2), obtenemos:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{x-a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''_{xx}(a, b) +$$

$$+ \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \frac{y-b}{1}\left[f'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} f''_{yx}(a, b) +\right.$$

$$\left.+ \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b)\right] + \frac{(y-b)^2}{1\cdot 2}\left[f''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b)\right] +$$

$$+ \frac{(y-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot} f'''_{yyy}(x, \eta).$$

Disponiendo los números como se indica en la fórmula (1), obtenemos:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+(x-a)f'_x(a,\ b)+(y-b)f'_y(a,\ b)+$$
$$+\frac{1}{2!}[(x-a)^2f''_{xx}(a,\ b)+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,\ b)+$$
$$+(y-b)^2f''_{yy}(a,\ b)]+\frac{1}{3!}[(x-a)^3f'''_{xxx}(\xi_1,\ b)+$$
$$+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,\ b)+3(x-a)(y-b)^2f'''_{xyy}(\xi_3,\ b)+$$
$$+(y-b)^3f'''_{yyy}(a,\ \eta)]. \qquad (6)$$

Esta es la fórmula de Taylor para $n=2$. La expresión

$$R_2=\frac{1}{3!}[(x-a)^3f'''_{xxx}(\xi_1,\ b)+3(x-a)^2(y-b)f'''_{xxy}(\xi_2,\ b)+$$
$$+3(x-a)(y-b)^2f'''_{xyy}(\xi_3,\ b)+(y-b)^3f'''_{yyy}(a,\ \eta)]$$

se llama término complementario. Pongamos ahora $x-a=\Delta x$, $y-b=\Delta y$, $\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, y transformemos R_2:

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta\rho^3}f'''_{xxx}(\xi_1,\ b)+3\frac{\Delta x^2\,\Delta y}{\Delta\rho^3}f'''_{xxy}(\xi_2,\ b)+\right.$$
$$\left.+3\frac{\Delta x\,\Delta y^2}{\Delta\rho^3}f'''_{xyy}(\xi_2,\ b)+\frac{\Delta y^2}{\Delta\rho^3}f'''_{yyy}(a,\ \eta)\right]\Delta\rho^3.$$

Puesto que $|\Delta x|<\Delta\rho$, $|\Delta y|<\Delta\rho$, y las terceras derivadas, según la hipótesis, son acotadas, el coeficiente de $\Delta\rho^3$ es limitado en el dominio examinado. Designemos este coeficiente por α_0 y escribamos:

$$R_2=\alpha_0\Delta\rho^3.$$

La fórmula de Taylor (6) para $n=2$ toma la forma:

$$f(x,\ y)=f(a,\ b)+\Delta xf'_x(a,\ b)+\Delta yf'_y(a,\ b)+$$
$$+\frac{1}{2!}[\Delta x^2f''_{xx}(a,\ b)+2\Delta x\,\Delta yf''_{xy}(a,\ b)+\Delta y^2f''_{yy}(a,\ b)]+\alpha_0\,\Delta\rho^3. \qquad (6')$$

Para cualquier n la fórmula de Taylor tiene una forma semejante.

§ 17. MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Definición 1. Se dice que la función $z=f(x,\ y)$ tiene un máximo en el punto $M_0(x_0,\ y_0)$ (es decir, cuando $x=x_0$, e $y=y_0$) si

$$f(x_0,\ y_0)>f(x,\ y)$$

para todos los puntos (x, y) suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) y distintos de este punto.

Definición 2. De modo igual se dice que la función $z = f(x, y)$ tiene un *mínimo* en el punto $M_0(x_0, y_0)$, si

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

para todos los puntos (x, y) suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) y distintos de este punto.

El máximo y el mínimo de una función se llaman *extremos* de esta función, es decir, la función admite un extremo en un punto dado, si tiene un máximo o un mínimo en esto punto.

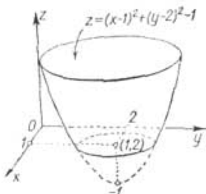


Fig. 184

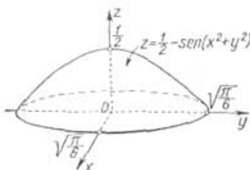


Fig. 185

Ejemplo 1. La función

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$$

alcanza el mínimo para $x = 1$, $y = 2$, es decir, en el punto $(1, 2)$. Efectivamente, $f(1, 2) = -1$ y como $(x-1)^2$ y $(y-2)^2$ son siempre positivos para $x \neq 1$, $y \neq 2$, entonces:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 > -1$$

es decir,

$$f(x, y) > f(1, 2).$$

En la figura 184 se da la interpretación geométrica de este resultado.

Ejemplo 2. La función $z = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ admite un máximo cuando $x = 0$, $y = 0$ (es decir, en el origen de coordenadas, véase la figura 185). En efecto

$$f(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

En el interior de la superficie $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ tomemos un punto (x, y) distinto del punto $(0, 0)$; entonces, para $0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{6}$ tenemos:

$$\operatorname{sen}(x^2 + y^2) > 0$$

y por eso

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2) < \frac{1}{2}$$

es decir,

$$f(x, y) < f(0, 0).$$

La definición de máximo y mínimo de la función se puede formular del modo siguiente:

Hagamos $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$; entonces:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f.$$

1) Si $\Delta f < 0$ para todos los incrementos suficientemente pequeños de las variables independientes, la función $f(x, y)$ admite un *máximo* en el punto $M(x_0, y_0)$.

2) *Si $\Delta f > 0$ para todos los incrementos suficientemente pequeños* de las variables independientes, la función $f(x, y)$ admite un *mínimo* en el punto $M(x_0, y_0)$.

Estas definiciones son igualmente válidas para una función de cualquier número de variables.

Teorema 1. (Condiciones necesarias para la existencia de un extremo).

Si la función $z = f(x, y)$ toma un extremo, cuando $x = x_0$ e $y = y_0$, entonces cada derivada parcial de primer orden de z o bien se anula para estos valores de los argumentos, o bien no existe.

En efecto, demos a la variable y un valor determinado, $y = y_0$. Entonces la función $f(x, y_0)$ será la función de una sola variable x. Puesto que la función tiene un extremo (máximo o mínimo) cuando $x = x_0$, por consiguiente, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ es igual a cero, o no existe. De modo semejante se puede demostrar que $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ es igual a cero o no existe.

Este teorema no es suficiente para estudiar el problema de la existencia de los valores extremos de la función. Sin embargo, si estamos seguros de que existen los extremos, este teorema nos permite hallar sus valores. En caso contrario es preciso hacer un estudio más detallado.

Así por ejemplo, la función $z = x^2 - y^2$ tiene las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, que se reducen a cero cuando $x = 0$, $y = 0$.

Sin embargo, la función no tiene máximo ni mínimo para los valores indicados. En efecto, esta función es igual a cero en el origen de coordenadas, mientras que en la vecindad inmediata de este punto, toma tantos valore positivos como negativos. Por consiguiente, el valor cero no es máximo ni mínimo (fig. 186).

Los puntos donde $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (o no existe) y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (o no existe), se llaman puntos *críticos* de la función $z = f(x, y)$.

Si la función alcanza el extremo en cualquier punto, esto puede tener lugar (en virtud del teorema 1) sólo en el punto crítico.

Para estudiar las funciones en puntos críticos establezcamos las condiciones suficientes del extremo de una función de dos variables.

Teorema 2. *Sea $f(x, y)$ una función definida en un dominio que comprende el punto $M_0(x_0, y_0)$. Esta función tiene derivadas parciales*

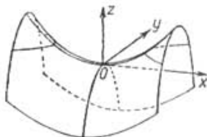


Fig. 186

continuas de hasta tercer orden inclusive. Supongamos, además, que $M_0(x_0, y_0)$ es un punto crítico de la función $f(x, y)$, es decir:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Entonces, para $x = x_0$, $y = y_0$:

1) *$f(x, y)$ tiene un máximo, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0;$$

2) *$f(x, y)$ tiene un mínimo, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

3) *$f(x, y)$ no tiene máximo ni mínimo, si*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 < 0;$$

4) *si* $\frac{\partial^2 f(x_0 y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0 y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$ *puede existir o no el extremo (en este caso hace falta realizar estudios más detallados).*

Demostración. Escribamos la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y)$ (fórmula (6) § 16).

Haciendo

$$a = x_0, \; b = y_0, \; x = x_0 + \Delta x, \; y = y_0 + \Delta y,$$

tenemos:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,\ y_0)+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3,$$

donde $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ y α_0 tiende a cero, cuando $\Delta\rho\to 0$.

Según la hipótesis

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}=0.$$

Por consiguiente,

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=$$
$$=\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3. \qquad (1)$$

Designemos por A, B, C los valores de las segundas derivadas parciales en el punto $M_0(x_0,\ y_0)$:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0}=A;\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{M_0}=B;\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0}=C.$$

Designemos por φ el ángulo formado entre el eje Ox y la dirección del segmento M_0M, donde M es el punto de coordenadas $M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$; entonces

$$\Delta x=\Delta\rho\cos\varphi;\ \Delta y=\Delta\rho\ \mathrm{sen}\,\varphi.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula para Δf, hallamos:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2[A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\ \mathrm{sen}\,\varphi+C\ \mathrm{sen}^2\varphi+2\alpha_0\Delta\rho]. \qquad (2)$$

Supongamos que $A\neq 0$.

Dividiendo y multiplicando por A la expresión comprendida entre corchetes, obtenemos:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\times$$
$$\times\left[\frac{(A\cos\varphi+B\ \mathrm{sen}\,\varphi)^2+(AC-B^2)\ \mathrm{sen}^2\varphi}{A}+2\alpha_0\Delta\rho\right]. \qquad (3)$$

Examinemos ahora cuatro casos posibles:

1) Sea $AC - B^2 > 0$, $A < 0$. Entonces, en el numerador de la fracción tenemos la suma de dos magnitudes no negativas. Estas no se anulan simultáneamente, puesto que el primer término se reduce a cero cuando $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B}$, y el segundo, cuando $\operatorname{sen} \varphi = 0$.

Si $A < 0$, la fracción es igual a una magnitud negativa que no se reduce a cero. Vamos a designarla por $-m^2$; entonces:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [-m^2 + 2\alpha_0 \Delta\rho],$$

donde m no depende de $\Delta\rho$ y $\alpha_0 \Delta\rho \to 0$ cuando $\Delta\rho \to 0$. Por tanto, para $\Delta\rho$ suficientemente pequeño tenemos:

$$\Delta f < 0$$

ó

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Pero, en este caso, para todos los puntos $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ suficientemente próximos al punto (x_0, y_0) tiene lugar la desigualdad

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0),$$

lo que significa que en el punto (x_0, y_0) la función $f(x, y)$ toma un *máximo*.

2) Sea $AC - B^2 > 0$ y $A > 0$. Razonando de modo semejante obtenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [m^2 + 2\alpha_0 \Delta\rho]$$

ó

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0),$$

es decir, $f(x, y)$ toma un *mínimo* en el punto (x_0, y_0).

3') Sea $AC - B^2 < 0$ y $A > 0$. En este caso la función *no tiene máximo, ni mínimo*. La función crece a partir del punto (x_0, y_0), cuando seguimos unas direcciones, y decrece cuando seguimos las otras. En efecto, al desplazarnos a lo largo del rayo $\varphi = 0$, tenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 [A + 2\alpha_0 \Delta\rho] > 0;$$

la función crece. Al desplazarse a lo largo del rayo $\varphi = \varphi_0$ tal que $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{A}{B}$, para $A > 0$, tenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 \left[\frac{AC - B^2}{A} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + 2\alpha_0 \Delta\rho\right] < 0;$$

la función decrece.

3") Sea $AC - B^2 < 0$ y $A < 0$. Aquí la función *no tiene máximo, ni mínimo*. El estudio se realiza de manera igual que en el caso 3'.

3''') Sea $AC - B^2 < 0$ y $A = 0$. Entonces $B \neq 0$, y podremos escribir la igualdad (2) en la forma:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 [\operatorname{sen}\varphi(2B\cos\varphi + C\operatorname{sen}\varphi) + 2\alpha_0 \Delta\rho].$$

Cuando φ es suficientemente pequeño, la expresión $(2B \cos\varphi + C \operatorname{sen}\varphi)$ conserva su signo, puesto que se encuentra en la vecindad de $2B$, mientras que el factor $\operatorname{sen}\varphi$ cambia de signo, según sea φ mayor o menor de cero (después de elegir $\varphi > 0$ y $\varphi < 0$, podemos tomar ρ suficientemente pequeño, de modo que $2\alpha_0$ no influya sobre el signo de la expresión entre corchetes). Por consiguiente, en este caso Δf también cambia de signo, para diferentes φ, es decir, *para diferentes Δx y Δy. Esto significa que la función no tiene* máximo, ni mínimo.

Así, cualquiera que sea el signo de A, siempre será válida la afirmación:

Si $AC - B^2 < 0$ en el punto (x_0, y_0), la función no tiene máximo ni mínimo en este punto. En este caso, la superficie que representa gráficamente esta función puede tener, por ejemplo, en la vecindad de este punto la forma de una silla de montar (véase la fig. 186). Se dice que la función tiene en este punto un *míni-máx*.

4) Sea $AC - B^2 = 0$. En este caso las fórmulas (2) y (3) no dan ninguna indicación respecto al signo de Δf. Así, por ejemplo, para $A \neq 0$, tenemos:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{(A\cos\varphi + B\operatorname{sen}\varphi)^2}{A} + 2\alpha_0 \Delta\rho\right];$$

cuando $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{A}{B}\right)$, el signo de Δf se determinará por el signo de $2\alpha_0$ y es necesario realizar una investigación especial (por ejemplo, mediante la fórmula de Taylor de orden superior o mediante algún otro procedimiento). De este modo el teorema (2) queda completamente demostrado.

Ejemplo 3. Hallar el máximo y el mínimo de la función

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Solución: 1) Hallemos los puntos críticos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3 &= 0, \\ -x + 2y - 2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

obtenemos:

$$x=-\frac{4}{3}; \quad y=\frac{1}{3}.$$

2) Hallemos las derivadas de segundo orden en el punto crítico $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ y determinemos la naturaleza de este punto crítico:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2; \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-1; \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2;$$

$$AC-B^2=2\cdot 2-(-1)^2=3>0.$$

Por tanto, en el punto $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ la función dada tiene un mínimo que es igual a:

$$z_{\text{mín}}=-\frac{4}{3}.$$

Ejemplo 4. Hallar el máximo y el mínimo de la función:

$$z=x^3+y^3-3xy.$$

Solución. 1) Hallemos los puntos críticos, utilizando las condiciones necesarias para la existencia de un extremo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=3x^2-3y=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=3y^2-3x=0.\end{aligned}\right\}$$

De aquí obtenemos dos puntos críticos:

$$x_1=1, \quad y_1=1 \quad \text{y} \quad x_2=0, \quad y_2=0.$$

2) Hallemos las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

3) Estudiemos la naturaleza del primer punto crítico

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6; \quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-3, \quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6;$$

$$AC-B^2=36-9=27>0; \quad A>0.$$

Por tanto, en el punto (1, 1) la función dada tiene un mínimo:

$$z_{\text{mín}}=-1.$$

4) Estudiemos la naturaleza del segundo punto crítico M_2 (0, 0):

$$A=0; \quad B=-3; \quad C=0;$$

$$AC-B^2=-9<0.$$

Por tanto, en el segundo punto crítico la función no tiene máximo, ni mínimo (míni—máx).

Ejemplo 5. Desarrollar el número positivo dado a en tres sumandos positivos de modo que el producto de éstos tenga el valor máximo.

Solución. Designemos respectivamente estos tres números por x, y y $a-x-y$. El producto de estos sumandos es igual a:

$$u=xy\,(a-x-y).$$

Según la hipótesis, $x>0$, $y>0$, $a-x-y>0$, es decir, $x+y<a$, $u>0$. Por consiguiente, x e y pueden tomar valores pertencientes al dominio limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=a$.

Hallemos las derivadas parciales de la función u:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y(a-2x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x(a-2y-x).$$

Igualando estas derivadas a cero, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$y(a-2x-y)=0; \qquad x(a-2y-x)=0.$$

Resolviendo este sistema, encontremos los puntos críticos

$$x_1=0, \quad y_1=0, \quad M_1(0,\ 0);$$
$$x_2=0, \quad y_2=a, \quad M_2(0,\ a);$$
$$x_3=a, \quad y_3=0, \quad M_3(a,\ 0);$$
$$x_4=\frac{a}{3}, \quad y_4=\frac{a}{3}, \quad M_4\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right).$$

Los primeros tres puntos se encuentran en la frontera del dominio y el último, en su interior. En la frontera del dominio la función u es igual a cero y en su interior la función es positiva; por tanto, en el punto $\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$ la función u tiene un máximo (puesto que el punto indicado es el único punto extremo dentro del *triángulo). El valor máximo del producto es*

$$u_{\text{máx}}=\frac{a}{3}\,\frac{a}{3}\left(a-\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}.$$

Estudiemos la naturaleza de los puntos críticos, utilizando las condiciones necesarias y suficientes de existencia de un extremo. Hallemos las derivadas parciales de segundo orden de la función u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=a-2x-2y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2x.$$

En el punto $M_1(0,\ 0)$ tenemos: $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=a$; $C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $AC-B^2=-a^2<0$. Por tanto, en el punto M_1 no hay máximo, ni mínimo. En el punto $M_2(0,\ a)$ tenemos: $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2a$; $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-a$; $C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $AC-B^2=-a^2<0$. Por consiguiente, en el punto M_2 tampoco hay máximo o mínimo. En el punto $M_3(a,\ 0)$ tenemos: $A=0$; $B=-a$; $C=-2a$; $AC-B^2=-a^2<0$. En el punto M_3 no hay máximo, ni mínimo. En el punto $M_4\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$ tenemos:

$$A=-\frac{2a}{3}; \quad B=-\frac{a}{3}; \quad C=-\frac{2a}{3}; \quad AC-B^2=\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{9}>0; \quad A<0.$$

Por tanto, la función tiene el máximo en el punto M_4.

Observación. La teoría de máximos y mínimos de la función de varias variables sirve de base para un método de obtención de fórmulas que representan dependencias funcionales mediante los

datos experimentales. El problema de «Obtención de una función a base de los datos experimentales según el método de cuadrados mínimos» se estudia en § 19 del capítulo presente.

§ 18. MAXIMO Y MINIMO DE LA FUNCION DE VARIAS VARIABLES RELACIONADAS MEDIANTE ECUACIONES DADAS (MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS)

Numerosos problemas de la determinación de los valores más grandes y más pequeños de la función se reducen a la búsqueda de los máximos y los mínimos de una función de varias variables que no son independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante ciertas condiciones adicionales (por ejemplo, las variables deben *satisfacer a las ecuaciones dadas*).

Examinemos, por ejemplo, el siguiente problema. De un pedazo de hojalata dado de área $2a$ hace falta hacer una caja cerrada en *forma de paralelepípedo que tenga el volumen máximo. Designemos* el largo, el ancho y el alto de la caja por x, y, z respectivamente. El problema se reduce a la búsqueda del máximo de la función

$$v = xyz,$$

a condición de que $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Aquí se trata de un problema del *extremo condicionado*: las variables x, y, z están ligadas por la relación $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. En este párrafo examinemos los métodos que se usan para solucionar tales problemas.

Estudiaremos, al principio, el problema del extremo condicionado de una función de dos variables, ligadas sólo por una condición. Hallemos los máximos y los mínimos de la función

$$u = f(x, y), \tag{1}$$

a condición de que x e y estén ligados entre sí por medio de la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Al existir la condición (2), sólo una de las dos variables x e y *es independiente (por ejemplo x), puesto que y se determina de la* ecuación (2) como función de x. Si resolvemos la ecuación (2) respecto a y, sustituimos en la igualdad (1) y por la expresión hallada, obtenemos la función de una variable x y reducimos el problema al estudio de máximos y mínimos de la función de una sola variable independiente x.

Podemos también solucionar el problema planteado sin resolver la ecuación (2), respecto a x o y. La derivada de u respecto a x debe reducirse a cero para aquellos valores de x en los que la función u pueda tener máximo o mínimo.

Hallemos $\frac{du}{dx}$ de la ecuacion (1), teniendo en cuenta que y es una

función de x:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, en los puntos de extremo

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\,. \qquad (3)$$

De la igualdad (2) hallemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\,. \qquad (4)$$

La igualdad (4) es válida para todos los x e y que satisfagan a la ecuación (2) (véase § 11, cap. VIII). Si multiplicamos todos los términos de la igualdad (4) por un coeficiente indeterminado λ, y los sumamos con los términos correspondientes de la igualdad (3), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

ó

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (5)$$

Esta igualdad se cumple en todos los puntos en que hay un extremo. Elijamos λ de manera tal que para los valores de x e y correspondientes a un extremo de la función u la expresión $\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ de la fórmula (5) se reduzca a cero *),

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\,.$$

Entonces para estos valores de x e y de la igualdad (5), se deduce que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\,.$$

*) Para ser más precisos supongamos que en los puntos críticos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\neq 0.$$

Así, pues, en los puntos de extremos se satisfacen tres ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

de tres incógnitas x, y, λ. De estas ecuaciones determinemos x e y, así como λ. La última desempeñó un papel auxiliar y ya no es necesaria.

Está claro que las ecuaciones (6) son condiciones necesarias para la existencia de un extremo condicionado, es decir, en *los puntos de los extremos se cumplen las ecuaciones (6). La proposición* recíproca no es cierta puesto que la función puede no tener un extremo condicionado para todos los x e y (y λ) que satisfagan las ecuaciones (6). Entonces hace falta realizar un estudio adicional de la naturaleza del punto crítico. Solucionando problemas concretos, se logra a veces determinar la naturaleza del punto crítico a base del carácter del mismo problema. Observemos, que los primeros miembros de las ecuaciones (6) son las derivadas parciales de la función

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \qquad (7)$$

respecto a las variables x, y, λ.

Así, con el fin de hallar los valores de x e y que satisfagan a la condición (2), para los cuales la función $u = f(x, y)$ pueda tener un máximo o un mínimo condicionado, es preciso formar una función auxilar (7), igualar a cero sus derivadas respecto a x, y y λ y determinar los desconocidos x, y (igual que el factor auxiliar λ) de las tres ecuaciones (6) obtenidas. El método examinado puede ser extendido al estudio del extremo condicionado de una función de cualquier número de variables.

Supongamos que es preciso determinar los máximos y los mínimos de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables, a condición de que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estén ligadas mediante $m (m < n)$ ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Con el objeto de hallar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, para los cuales puedan haber máximos y mínimos condicionados, hay que

formar la función:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n),$$

e igualar a cero sus derivadas parciales respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Determinemos de las $m+n$ ecuaciones (8) y (9) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, así como las incógnitas auxiliares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Como en el caso de una función de dos variables, el problema de la existencia de un máximo o un mínimo, para los valores encontrados de la función o de la ausencia completa de cualquier extremo en este punto queda pendiente.

Esta cuestión la resolvemos mediante consideraciones auxiliares.

Ejemplo 1. Volvamos al problema formulado al principio del párrafo presente: hallar el máximo de la función

$$v = xyz,$$

si es:

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0). \qquad (10)$$

Formemos una función auxiliar:

$$F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a).$$

Hallemos sus derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$\left.\begin{array}{r} yz + \lambda(y+z) = 0, \\ xz + \lambda(x+z) = 0, \\ xy + \lambda(x+y) = 0. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

El problema se reduce a la solución del sistema de cuatro ecuaciones (10) y (11) con cuatro incógnitas (x, y, z, y λ). Para solucionar este sistema, multipliquemos la primera ecuación de (11) por x, la segunda por y, la tercera, por z, y sumemos las expresiones obtenidas. Teniendo en cuenta la igualdad (10), hallemos $\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$. Introduciendo en la ecuacion (11) el valor

obtenido de λ obtenemos:

$$yz\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right]=0,$$

$$xz\left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right]=0,$$

$$xy\left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right]=0.$$

Puesto que x, y, z según la naturaleza del problema son distintos de cero de las últimas ecuaciones se deduce:

$$\frac{3x}{2a}(y+z)=1, \quad \frac{3y}{2a}(x+z)=1, \quad \frac{3z}{2a}(x+y)=1.$$

De las dos primeras ecuaciones hallemos $x=y$, de las ecuaciones segunda y tercera, $y=z$. Pero, en este caso se deduce de la ecuacion (10): $x=y=z=\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Así, obtenemos el único sistema de los valores x, y, z para los cuales la función puede tener un máximo o un mínimo.

Se puede demostrar que éste es el punto de máximo. Lo mismo se deduce también de ciertas consideraciones geométricas: según las condiciones del problema, el volumen de la caja no puede ser infinitamente grande, por tanto, el volumen debe ser máximo para ciertos valores de sus lados.

Entonces, el volumen de la caja es máximo, cuando ésta tiene la forma de cubo, con arista igual a $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Ejemplo 2. Hallar el valor máximo de la raíz de n-ésimo grado del producto de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a condición de que la suma de estos números sea igual a un número dado a. El problema, por consiguiente se puede plantear así: hallar el máximo de la función $u=\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, a condición de que:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n-a=0 \\ (x_1>0,\ x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0). \tag{12}$$

Formemos una función auxiliar:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)=\sqrt[n]{x_1, \ldots, x_n}+\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n-a).$$

Hallemos sus derivadas parciales:

$$F'_{x_1}=\frac{1}{n}\frac{x_2x_3\ldots x_n}{(x_1\ldots x_n)^{\frac{n-1}{n}}}+\lambda=\frac{1}{n}\frac{u}{x_1}+\lambda=0 \quad \text{ó} \quad n=-n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2}=\frac{1}{n}\frac{u}{x_2}+\lambda=0 \qquad \text{ó} \quad u=-n\lambda x_2,$$

. . . .

$$F'_{x_n}=\frac{1}{n}\frac{u}{x_n}+\lambda=0 \qquad \text{ó} \quad u=-n\lambda x_n.$$

De las últimas ecuaciones encontremos:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

y, en virtud de la ecuación (12), obtenemos:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}.$$

La naturaleza del problema dicta que en este punto crítico la función $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ tiene un máximo igual a $\frac{a}{n}$.

Por consiguiente, para todos los números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ligados mediante la correlación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, se cumple la desigualdad:

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{a}{n} \tag{13}$$

(puesto que, según ha sido demostrado, $\frac{a}{n}$ es el mayor valor de esta función).

Sustituyendo a en la desigualdad (13) por su expresión de la ecuación (12), obtenemos:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{14}$$

Esta ecuación es válida para todos los números provistos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La expresión del primer miembro de la igualdad (14) se llama *valor medio geométrico* de estos números. Así, el valor medio geométrico de unos cuantos números positivos no es mayor que el valor medio aritmético de estos números.

§ 19. OBTENCION DE UNA FUNCION A BASE DE DATOS EXPERIMENTALES SEGUN EL METODO DE CUADRADOS MINIMOS

Supongamos que es preciso determinar experimentalmente una dependencia de la magnitud y en función de x:

$$y = \varphi(x). \tag{1}$$

Sea el resultado del experimento n valores de la función y para los valores correspondientes del argumento x:

x	x_1	x_2	. . . . . .	x_n
y	y_1	y_2	. . . . . .	y_n

La forma de la función $y = \varphi(x)$ se determina teóricamente o a base del carácter de disposición en el plano de coordenadas de los puntos que corresponden a los valores experimentales. Estos puntos se llaman experimentales. Supongamos que los puntos experimentales se disponen en el plano de coordenadas de la manera indicada en la fig. 187*a*.

Tomando en consideración que durante el experimento tienen lugar errores, es natural suponer que la función desconocida $y = \varphi(x)$ se puede buscar en la forma de una función lineal $y = ax + b$. Si los puntos experimentales están dispuestos de la manera indicada en la fig. 187 *b*, es natural buscar la función $y = \varphi(x)$ en la forma: $y = ax^b$, etc. Elegida la forma de función $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$, *tenemos que buscar los parámetros* $a, b, c, \ldots$ (que la integran) de modo tal que la función describa de la mejor manera el proceso examinado.

El método ampliamente difundido para solucionar el problema dado es el de *cuadrados mínimos* que consiste en lo siguiente.

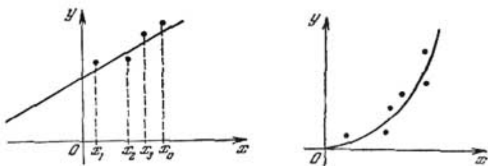


Fig. 187a, b

Examinemos una suma de los cuadrados de diferencias de los valores y_i, que se obtienen del experimento, y la función $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ en los puntos correspondientes:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2. \tag{2}$$

Elijamos los parámetros $a, b, c, \ldots$ de modo que esta suma tenga valor mínimo:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2 = \text{mín.} \tag{3}$$

Así, el problema se ha reducido a la búsqueda de los valores de los parámetros $a, b, c, \ldots$, para los cuales la función $S(a, b, c, \ldots)$ tiene un mínimo.

En virtud del teorema 1 (pág. 311) tenemos que estos valores a, b $c, \ldots$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \ \ldots, \tag{4}$$

o, en la forma desarrollada:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)}{\partial a}=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)}{\partial b}=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)}{\partial c}=0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Aquí, el número de ecuaciones es igual al de incógnitas. En cada caso concreto se investiga la cuestión sobre la existencia de la solución del sistema de ecuaciones (5) y del mínimo de la función $S(a,\ b,\ c,\ \ldots)$.

Examinemos algunos casos de la determinación de la función $y=\varphi(x,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)$.

I. Sea $y=ax+b$. Entonces, la función $S(a,\ b)$ tiene la forma: (véase la expresión (2)):

$$S(a,\ b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2. \qquad (6)$$

Esta es una función con dos variables, a y b (x_i e y_i son números dados; véase la tabla en la pág. 323). Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i=0,\\
&\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,
\end{aligned}\right\}$$

es decir, el sistema de ecuaciones (5) en este caso, toma la forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-bn=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Hemos obtenido el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a y b. Es evidente que el sistema tiene una solución

determinada y la función $S(a, b)$ tiene un mínimo para los valores encontrados a y b*).

II. Sea la función de aproximación un trinomio de segundo grado

$$y = ax^2 + bx + c.$$

En este caso la expresión (2) tiene la forma:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \tag{8}$$

Esta es una función de tres variables a, b, c.

El sistema de ecuaciones (5) toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0, \end{aligned}\right\}$$

o, en la forma desarrollada:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales para determinar las incógnitas a, b, c. De las condiciones del problema se deduce que el sistema tiene una solución determinada y, además, la función $S(a, b, c)$ tiene un mínimo para los valores obtenidos de a, b, c.

---

*) Esto se verifica fácilmente también a base de las condiciones suficientes (véase la pág. 312). En efecto, tenemos:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b} = \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = n.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

Ejemplo: Supongamos que a base de un experimento hemos obtenido cuatro valores de la función buscada $y = \varphi(x)$, para los cuatro valores del argumento ($n = 4$) que se dan en la tabla

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Busquemos la función φ en forma de una función lineal $y = ax + b$. Formemos la expresión $S(a, b)$:

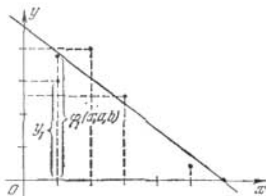


Fig. 187c

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{4} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Para formar el sistema (7), de determinación de los coeficientes a y b, calculamos previamente

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 21; \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39;$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 11; \qquad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

El sistema (2) toma la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallamos a y b: $a = -\frac{26}{35}$, $b = \frac{159}{35}$. La recta buscada (véase fig. 187c) es:

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

§ 20. PUNTOS SINGULARES DE UNA CURVA

El concepto de la derivada parcial se utiliza para el estudio de las curvas.

Sea $F(x, y) = 0$, la ecuación de una curva.

El coeficiente angular de la tangente a la curva se determina según la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(vease § 11, cap. VIII). Si por lo menos una de las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ no se reduce a cero en el punto dado $M(x, y)$ de la curva examinada, en éste se define $\frac{\partial y}{\partial x}$ o $\frac{\partial x}{\partial y}$. La curva $F(x, y) = 0$ tiene en este punto una tangente bien determinada. En este caso $M(x, y)$ se llama *punto simple*. Al contrario, si el punto $M_0(x_0, y_0)$ es tal que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0,$$

el coeficiente angular de la tangente es indeterminado.

Definición. Si ambas derivadas parciales, $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$, se anulan en el punto $M_0(x_0, y_0)$ de la curva $F(x, y) = 0$ éste se llama *punto singular* de la curva. Por consiguiente, el *punto singular* de la curva está determinado por el sistema de ecuaciones:

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Claro está que no todas las curvas tienen puntos singulares. Por ejemplo, para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

es evidente que

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$$

Las derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ se reducen a cero sólo cuando $x = 0$, $y = 0$.

Pero estos valores de x e y no satisfacen la ecuación de la elipse, por consiguiente, la elipse no tiene puntos singulares.

Sin emprender un estudio detallado de la conducta de una curva en la proximidad del punto singular, examinemos unos cuantos ejemplos de curvas que tienen puntos singulares.

Ejemplo 1. Estudiar los puntos singulares de la curva

$$y_2 - x(x-a)^2 = 0 \quad (a > 0)$$

Solución. En el caso dado $F(x, y) = y^2 - x(x-a)^2$, por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-a)(a-3x); \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Resolviendo tres ecuaciones en conjunto:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{y} = 0$$

hallamos el sistema único de valores de x e y que las satisface:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

Por consiguiente, $M_0(a, 0)$ es el punto singular de la curva.

Estudiemos la conducta de la curva en la proximidad del punto singular y construyamos esta curva. Escribamos la ecuación dada en la forma:

$$y = \pm (x-a)\sqrt{x}.$$

De esta fórmula se deduce que la curva:

1) está definida sólo para $x \geqslant 0$; 2) es simétrica con relación al eje Ox; 3) corta el eje Ox en los puntos $(0,0)$ y $(a, 0)$. Como se ha indicado, el último punto es singular.

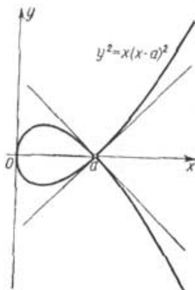


Fig. 188a.

Examinemos primero la parte de la curva, correspondiente a los valores positivos.

$$y = (x-a)\sqrt{x}.$$

Hallemos la primera y segunda derivadas de y respecto a x:

$$y' = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \qquad y'' = \frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

Para $x=0$ tenemos $y' = \infty$. Por consiguiente, la curva toca el eje Oy en el origen de coordenadas. Para $x = \frac{a}{3}$ tenemos $y' = 0$, $y'' > 0$, es decir, la función y tiene un mínimo cuando $x = \frac{a}{3}$:

$$y = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

En el segmento $0 < x < a$ tenemos $y < 0$; para $x > \frac{a}{3}$, $y' > 0$; cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$. Para $x = a$ tenemos $y' = \sqrt{a}$, es decir, la rama de la curva

$y=+(x-a)\sqrt{x}$ tiene una tangente $y=\sqrt{a}(x-a)$ en el punto singular $M_0(a, 0)$.

Puesto que la segunda rama de la curva $y=-(x-a)\sqrt{x}$ es simétrica a la primera respecto del eje Ox, es claro que en el punto singular la curva tiene otra tangente (a la segunda rama) definida por la ecuación

$$y=-\sqrt{a}(x-a).$$

La curva pasa dos veces por el punto singular. Tal punto se llama *doble* (o *crunodal*). La curva examinada se expone en la figura 188*a*.

Ejemplo 2. Hallar los puntos singulares de la curva parábola semicúbica)

$$y^2-x^3=0.$$

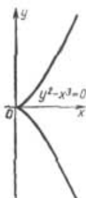


Fig. 188b

Solución. Las coordenadas de los puntos singulares se determinan, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$y^2-x^3=0;\quad 3x^2=0;\quad 2y=0.$$

Por tanto, $M_0(0, 0)$ es el punto singular.

Escribamos la ecuación dada en la forma

$$y=\pm\sqrt{x^3}\ .$$

Para construir la curva, estudiemos al principio la rama que corresponde a los valores positivos: la otra rama de la curva, correspondiente a los valores negativos, no necesita un estudio especial, puesto que es simétrica a la primera con relación al eje Ox.

La función y está definida sólo para $x\geqslant 0$, no es negativa y crece con el aumento de x. Hallemos primera y segunda derivadas de la función $y=\sqrt{x^3}$:

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x};\quad y''=\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}\ .$$

Para $x=0$ tenemos: $y=0$, $y'=0$. Por consiguiente, la rama examinada de la curva tiene una tangente $y=0$ en el origen de coordenadas. La segunda rama de la curva $y=-\sqrt{x^3}$ también pasa por el origen de coordenadas teniendo la misma tangente $y=0$. Por tanto, dos diferentes ramas de la curva pasan por el origen de coordenadas, tienen una misma tangente y se disponen simétricamente por ambos lados de esta tangente. Tal punto singular se llama *punto de retroceso de primera especie* (fig. 188 *b*).

Observación. Se puede considerar la curva $y^2-x^3=0$ como un caso límite de la curva $y^2=x(x-a)^2$ (examinada en el ejemplo 1), cuando $a\to 0$, es decir, *cuando el lazo de la curva se contrae hasta reducirse a un solo punto.*

Ejemplo 3. Estudiar la curva $(y-x^2)^2-x^5=0$.

Solución. *Las coordenadas de los puntos singulares se determinan por* el sistema de ecuaciones

$$-4x(y-x^2)-5x^4=0;\quad 2(y-x^2)=0,$$

que tiene la solución única: $x=0$, $y=0$. Por tanto, el origen de coordenadas es un punto singular.

Escribamos la ecuación dada en la forma: $y=x^2\pm\sqrt{x^5}$. De esta ecuación se deduce que x puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$.

Hallemos las derivadas de primer y segundo orden:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2} \sqrt{x^3}; \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4} \sqrt{x}.$$

Estudiemos por separado las ramas de la curva que corresponden respectivamente a los valores positivos y negativos. En ambos casos para $x = 0$ tenemos: $y = 0$, $y' = 0$, es decir, el eje Ox es la única tangente para las dos ramas. Examinemos al principio la rama

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}.$$

Cuando x crece desde 0 hasta ∞, y también crece desde 0 hasta ∞. La rama segunda

$$y = x^2 - \sqrt{x^5}$$

corta el eje Ox en los puntos (0, 0) y (1, 0). Cuando $x = \frac{16}{25}$, la función $y =$

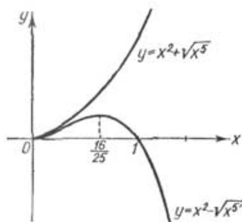


Fig. 189

$= x^2 - \sqrt{x^5}$ tiene un máximo. Si $x \to +\infty$, entonces $y \to -\infty$.

Así, las dos ramas de la curva pasan por el origen de coordenadas. Ambas tienen una misma tangente y se disponen por un lado de ésta, en la vecindad del punto de contacto. Tal punto singular se llama *punto de retroceso de segunda especie*. La gráfica de la función estudiada está expuesta en la figura 189.

Ejemplo 4. Estudiar la curva $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

Solución. El origen de coordenadas es un punto singular. Para examinar variación de la curva en la vecindad de este punto escribamos la ecuación de la curva en forma:

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

Puesto que en la ecuación entran solamente potencias pares de las variables, la curva es simétrica con relación a los ejes de coordenadas y, por consiguiente, es suficiente estudiar una parte de la curva, correspondiente a los valores positivos de x e y. De la última ecuación se deduce que x puede variar en el segmento desde 0 hasta 1, es decir, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Hallemos la primera derivada para la rama de la curva que presenta gráficamente la función $y = +x^2\sqrt{1-x^2}$:

$$y' = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para $x = 0$ tenemos: $y = 0$, $y' = 0$. Por tanto, la curva toca el eje Ox en el origen de coordenadas.

Para $x = 1$ tenemos: $y = 0$, $y' = \infty$. Por consiguiente, en el punto $(1, 0)$ la tangente es paralela al eje Oy. Cuando $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, la función tiene un máximo (fig. 190).

En el origen de coordenadas (en el punto singular) las dos ramas de la curva, que corresponden a los signos positivo y negativo delante de la raíz, se tocan

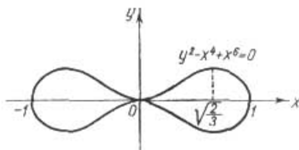


Fig. 190

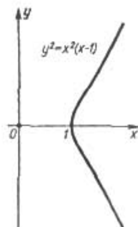


Fig. 191

mutuamente. Tal punto singular se llama punto de osculación (se llama también *tacnodo*).

Ejemplo 5. Estudiar la curva $y^2 - x^2(x-1) = 0$.

Solución. Escribamos el sistema de ecuaciones que define los puntos singulares:

$$y^2 - x^2(x-1) = 0; \quad -3x^2 + 2x = 0; \quad 2y = 0.$$

Este sistema tiene la solución: $x = 0$, $y = 0$, por consiguiente, el punto $(0, 0)$ de la curva es singular. Escribamos la ecuación dada en la forma $y = \pm x\sqrt{x-1}$. Es evidente que x puede tomar todos los valores comprendidos entre 1 y $+\infty$, así como el valor de cero (en este caso $y = 0$).

Estudiamos la rama de la curva correspondiente al valor positivo, delante de la raíz. Cuando x crece desde 1 hasta ∞, y aumenta también desde 0 hasta ∞. La derivada es:

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$$

Para $x = 1$ tenemos $y' = \infty$. Por consiguiente, en el punto $(1, 0)$ la tangente es paralela al eje Oy.

La segunda rama de la curva, que corresponde al signo negativo, es simétrica a la primera respecto al eje Ox.

El punto (0, 0) tiene coordenadas que satisfacen la ecuación y, por tanto, pertenece a la curva, pero en su vecindad no hay otros puntos de la curva (fig. 191). El punto singular de este género se llama *aislado*.

Ejercicios para el capítulo VIII

Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $z=x^2\operatorname{sen}^2 y$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\operatorname{sen}^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\operatorname{sen} 2y$. **2.** $z=x^{y^2}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2x^{y^2-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^{y^2}2y\ln x$. **3.** $u=x^{x^2+y^2+z^2}$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2ze^{x^2+y^2+z^2}$. **4.** $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **5.** $z=\operatorname{arcotg}(xy)$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2}$. **6.** $z=\operatorname{arcotg}\frac{y}{x}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

7. $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. $u=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{y}}$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-\frac{z}{y^2}e^{\frac{z}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}e^{\frac{z}{y}}$. **9.** $z=\operatorname{arcsen}(x+y)$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}=\frac{\partial z}{\partial y}$. **10.** $z=\operatorname{arcotg}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

Hallar las diferenciales totales de las siguientes funciones

11. $z=x^2+xy^2+\operatorname{sen} y$. *Resp.* $dz=(2x+y^2)\,dx+(2xy+\cos y)\,dy$. **12.** $z=\ln(xy)$. *Resp.* $dz=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$. **13.** $z=e^{x^2+y^2}$. *Resp.* $dz=2e^{x^2+y^2}(x\,dx+y\,dy)$.

14. $u=\operatorname{tg}(3x-y)+6^{y+z}$. *Resp.* $du=\frac{3\,dx}{\cos^2(3x-y)}+\left(-\frac{1}{\cos^2(3x-y)}+6^{y+z}\ln 6\right)dy+6^{y+z}\ln 6\,dz$. **15.** $w=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}$. *Resp.* $dw=\frac{y\,dx-x\,dy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$.

16. Hallar $f'_x(2, 3)$ y $f'_y(2, 3)$ si $f(x, y)=x^2+y^2$. *Respuesta:* $f'_x(2, 3)=4$, $f'_y(2, 3)=27$. **17.** Hallar $df(x, y)$ para $x=1$, $y=0$; $dx=\frac{1}{2}$, $dy=\frac{1}{4}$ si $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$. *Respuesta:* $\frac{1}{2}$. **18.** Hallar para los pequeños valores absolutos de las variables x, y, z una fórmula que da la expresión aproxi-

mada para: $\sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$ *Respuesta:* $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$. **19.** Hallar lo mismo para $\sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}$. *Respuesta:* $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$. **20.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=u+v^2$, $u=x^2+\operatorname{sen} y$, $v=\ln(x+y)$. *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2v\frac{1}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+2v\frac{1}{x+y}$. **21.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=\sqrt{\frac{1+u}{1+v}}$; $u=-\cos x$; $v=\cos x$. *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=0$. **22.** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$

58

y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=e^{u-2v}$, $u=\operatorname{sen} x$, $v=x^3+y^2$. Respuesta: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{u-2v}(\cos x-6x^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{u-2v}(0-2\cdot 2y)=-4ye^{u-2v}$. **23.** Hallar las derivadas totales de las funciones dadas: $z=\operatorname{arcsen}(u+v)$; $u=\operatorname{sen} x\cos\alpha$; $v=\cos x\operatorname{sen}\alpha$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, si $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, si $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x+\alpha<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$. **24.** $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$; $y=a\operatorname{sen} x$; $z=\cos x$. *Resp.* $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{ax}\operatorname{sen} x$. **25.** $z=\ln(1-x^4)$; $x=\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$; $\frac{dz}{d\theta}=-2\operatorname{tg}\theta$.

Hallar las derivadas de las funciones implícitas de x, dadas por las ecuaciones

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. **27.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. **28.** $y^x=x^y$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$. **29.** $\operatorname{sen}(xy)-e^{xy}-x^2y=0$. *Resp.* $\frac{dy}{dx}=\frac{y[\cos(xy)-e^{xy}-2x]}{x[x+e^{xy}-\cos(xy)]}$. **30.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; hállese $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. *Resp.* $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$. **31.** $u-v\operatorname{tg} aw=0$; hállese $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$. *Resp.* $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\cos^2 aw}{av}$; $\frac{dw}{dv}=-\frac{\operatorname{sen} 2aw}{2av}$. **32.** $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$; demuéstrese que $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$. **33.** $\frac{z}{x}=F\left(\frac{y}{z}\right)$; demuéstrese que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, sea cual fuera la función derivable F.

Calcular las derivadas parciales de segundo orden:

34. $z=x^3-4x^2y+5y^2$. *Resp.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10$.

35. $z=e^x \ln y+\operatorname{sen} y \ln x$. *Resp.* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x \ln y-\frac{\operatorname{sen} y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{e^x}{y}+$ $+\frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\operatorname{sen} y \ln x$. **36.** Demostrar que, si $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ entonces: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. **37.** Demostrar que, si $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$ entonces: $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$. **38.** Demostrar que, si $z=\ln(x^2+y^2)$ entonces: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **39.** Demostrar que, si $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$, entonces:

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

para φ y ψ cualesquiera, derivadas dos veces.

40. Hallar la derivada de la función $z=3x^4-xy+y^3$ en el punto $M(1, 2)$ siguiendo dirección que forma con el eje Ox el ángulo de 60°. *Respuesta*: $5+11\sqrt{3/2}$.

41. Hallar la derivada de la función $z=5x^2-3x-y-1$ en el punto $M(2, 1)$ siguiendo la dirección de la recta que une este punto con el punto $N(5, 5)$. *Respuesta*: 9, 4.

42. Hallar la derivada de la función $f(x, y)$, siguiendo las direcciones: 1) de la bisectriz del ángulo de coordenadas Oxy. *Respuesta*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. 2) del semieje negativo Ox. *Respuesta*: $-\frac{\partial f}{\partial x}$.

43. $f(x, y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$. Demostrar que en el punto $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ la derivada es igual a cero, siguiendo cualquier dirección ("función estacionaria").

44. Determinar de todos los triángulos de igual perímetro $2p$ el que tiene mayor área. *Respuesta*: triángulo equilátero.

45. Hallar un paralelepípedo rectangular de área total dada S que tenga el volumen máximo. *Respuesta*: cubo con arista igual a $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

46. Hallar la distancia entre dos rectas en el espacio, cuyas ecuaciones son: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. *Respuesta*: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Analizar el máximo y el mínimo de la función:

47. $z=x^3y^2(a-x-y)$. *Respuesta*: máximo z para $x=\frac{a}{2}$; $y=\frac{a}{3}$. **48.** $z=$ $=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. *Respuesta*: mínimo z para $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

49. $z=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}(x+y)$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ *Respuesta*: máximo z para $x=y=\frac{\pi}{3}$.

50. $z=\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$: *Respuesta*: máximo z para $x=y=\frac{\pi}{3}$.

Hallar los puntos singulares de las curvas siguientes, analizar la naturaleza de estos puntos singulares y escribir las ecuaciones de las tangentes en estos puntos:

51. $x^3+y^3-3axy=0$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es nudo; $x=0$, $y=0$ son ecuaciones de las tangentes.

52. $a^4y^2=x^4(a^2-x^2)$. *Respuesta*: punto de osculación en el origen de coordenadas; tangente doble $y^2=0$.

53. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es punto de retroceso de primera especie, $y^2=0$ es la ecuación de la tangente.

54. $y^2=x^2(9-x^2)$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es nudo, $y=\pm 3x$ son las ecuaciones de las tangentes.

55. $x^4-2ax^2y-axy^2+a^2x^2=0$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es punto de retroceso de segunda especie; $y^2=0$ es la ecuación de la tangente doble.

56. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$. *Respuesta*: $M_0(0, 0)$ es nudo; $y=\pm x$ son las ecuaciones de las tangentes.

57. $b^2x^2+a^2y^2=x^2y^2$. *Respuesta*. $M_0(0, 0)$ es un punto aislado.

58. Demostrar que el origen de coordenadas para la curva $y=x\ln x$ es un punto extremo y que en este punto el eje Oy es tangente a la curva.

59. Demostrar que el origen de coordenadas es el punto angular de la curva $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ y que las tangentes en este punto son; a la derecha $y=0$ y a la izquierda $y=x$.

CAPITULO IX

APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

§ 1. ECUACIONES DE LA CURVA EN EL ESPACIO

Estudiemos el vector $\overline{OA} = r$ cuyo origen coincide con el de coordenadas, y su extremo es un punto $A\ (x,\ y,\ z)$ (fig. 192). Este vector se llama *radio vector*.

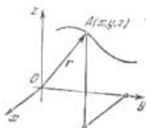


Fig. 192

Expresemos este vector mediante sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$r = xi + yj + zk. \tag{1}$$

Supongamos que las proyecciones del vector r son funciones de cierto parámetro t:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En este caso la fórmula (1) se puede escribir así:

$$r = \varphi(t)\,i + \psi(t)\,j + \chi(t)\,k \tag{1'}$$

o, en la forma más breve:

$$r = r(t). \tag{1}$$

Cuando t varía, las coordenadas x, y, z varían también y el punto A, que es el extremo del vector r, describirá en el espacio una línea llamada *hodógrafo* del vector $r = r(t)$. Las ecuaciones (1′) o (1″),

se llaman *ecuaciones vectoriales* de una línea en el espacio. Las ecuaciones (2) se llaman *ecuaciones paramétricas* de una línea en el espacio. Con ecuaciones se determinan las coordenadas x, y, z del punto correspondiente de la curva para cada valor de t.

Observación. La curva en el espacio puede definirse también como el lugar geométrico de los puntos de intersección de dos super-

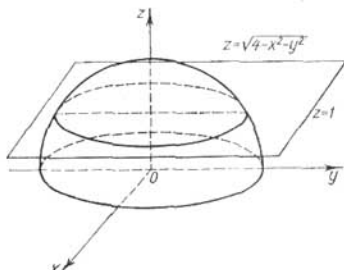


Fig. 193

ficies. Por tanto, esta curva puede estar dada por las dos ecuaciones de estas superficies:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1(x,\ y,\ z)=0,\\ \Phi_2(x,\ y,\ z)=0.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad z=1$$

son las de una circunferencia en el espacio que se obtiene como resultado de la intersección de una esfera con un plano (fig. 193).

Así, la curva en el espacio puede ser expresada o bien por las ecuaciones paramétricas (2), o bien mediante dos ecuaciones de las superficies (3).

Si eliminamos el parámetro t de las ecuaciones (2), y obtenemos dos ecuaciones que ligan x, y y z, realizamos el paso de las curvas dadas por el procedimiento paramétrico a las curvas expresadas por la intersección de dos superficies. Recíprocamente, si ponemos $x=\varphi(t)$ (donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria) y hallamos y y z como funciones de t de las ecuaciones

$$\Phi_1[\varphi(t),\ y,\ z]=0, \qquad \Phi_2[\varphi(t),\ y,\ z]=0,$$

realizamos el paso de las curvas expresadas por la intersección de dos superficies a las curvas dadas por el procedimiento paramétrico.

Ejemplo 1. Sean

$$x=4t-1,\ y=3t,\ z=t+2$$

las ecuaciones paramétricas de una recta. Eliminando el parámetro t obtenemos dos ecuaciones cada una de las cuales es la ecuación de un plano. Por ejemplo, al restar sucesivamente, término a término, de la primera ecuación la segunda y la tercera, obtenemos: $x-y-z=-3$. Por otro lado,

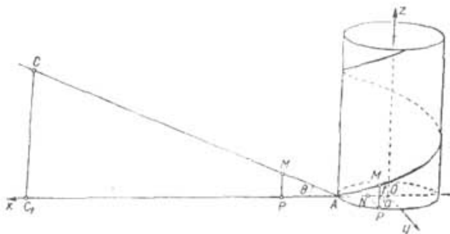


Fig. 194

restando la tercera, previamente cuadruplicada de la primera ecuación, obtenemos: $x-4z=-9$. Resulta que la recta dada es una línea de intersección de los planos $x-y-z+3=0$ y $x-4z+9=0$.

Ejemplo 2. Examinemos un cilindro recto de radio a cuyo eje coincide con el eje Oz (fig. 194). Arrollemos sobre este cilindro un triángulo rectángulo C_1AC de modo que el vértice A del triángulo coincida con el punto de intersección de la generatriz del cilindro con el eje Ox, y el cateto AC_1 se arrolle sobre la sección de este cilindro, situada en el plano Oxy. En este caso la hipotenusa formará sobre el cilindro una línea llamada *hélice*.

Escribamos la ecuación del hélice, designando por x, y, z las coordenadas de su punto variable M y por t el ángulo AOP (véase la figura 194). Entonces:

$$x=a\cos t,\ y=a\operatorname{sen} t,\ z=PM=AP\operatorname{tg}\theta,$$

donde, θ designa el ángulo agudo del triángulo C_1AC. Notemos que $\widehat{AP}=at$ (puesto que $\widehat{AP}$ es el arco de una circunferencia de radio a correspondiente al ángulo central t) designemos $\operatorname{tg}\theta$ por m. Así obtenemos las ecuaciones paramétricas del hélice:

$$x=a\cos t,\ y=a\operatorname{sen} t,\ z=\text{amt}$$

(aquí t es el parámetro), o en forma vectorial:

$$r=ia\cos t+ja\operatorname{sen} t+k\ \text{amt}.$$

De las ecuaciones paramétricas del hélice es fácil eliminar el parámetro t. Elevando al cuadrado dos primeras ecuaciones y sumándolas,

hallamos $x^2 + y^2 = a^2$. Esta es la ecuación del cilindro sobre el cual está trazado el *hélice*. Ahora, dividiendo, término a término, la segunda ecuación por la primera y sustituyendo en la relación obtenida el valor de t hallado de la tercera ecuación, encontremos la ecuación de otra superficie sobre que está trazada el hélice:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{am}.$$

Esta es la llamada *superficie helicoidal* (*helicoide*). Se puede considerarla *como la huella del movimiento de una semirrecta paralela al plano Oxy que* tiene siempre uno de sus extremos en el eje Oz, mientras que la misma semirrecta gira alrededor del eje Oz con una velocidad angular constante, y al mismo tiempo, *con una velocidad constante, se desplaza hacia arriba*. El *hélice no es más que* una línea de intersección de estas dos superficies. Por eso, el hélice se puede definir mediante dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{am}.$$

§ 2. LIMITE Y DERIVADA DE UNA FUNCION VECTORIAL DE UN ARGUMENTO ESCALAR. ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CURVA. ECUACION DEL PLANO NORMAL

Volvamos a las fórmulas (1′) y (1″) del párrafo anterior:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}$$

ó

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

En el caso general cuando t varía, la magnitud y la dirección del vector $\boldsymbol{r}$ varían también. Se dice que $\boldsymbol{r}$ es una función vectorial del argumento escalar t.

Supongamos que:

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \varphi_0,$$
$$\lim_{t \to t_0} \psi(t) = \psi_0,$$
$$\lim_{t_0 \to t_0} \chi(t) = \chi_0.$$

En este caso se dice que el vector $\boldsymbol{r}_0 = \varphi_0\,\boldsymbol{i} + \psi_0\,\boldsymbol{j} + \chi_0\,\boldsymbol{k}$ es el límite del vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ (fig. 195):

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0.$$

De la última ecuación se deduce que:

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| = \lim_{t \to t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [\chi(t) - \chi_0]^2} = 0$$

y

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{r}_0|.$$

Pasemos ahora a la noción de la derivada de una función vectorial del argumento escalar

$$\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}, \qquad (1)$$

suponiendo que el origen del vector $\boldsymbol{r}(t)$ coincide con el origen de coordenadas. Sabemos que la última ecuación es la ecuación vectorial *de una línea en el espacio.*

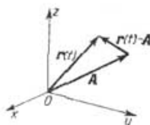


Fig. 195

Elijamos un valor fijo de t, que corresponda a un punto determinado M en la curva, y demos a t un incremento Δt; en este caso obtenemos el vector:

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = \varphi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{k},$$

que determina en la curva un punto M_1 (fig. 196). Hallemos el incremento del vector:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = [\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)]\,\boldsymbol{i} + \\ + [\psi(t+\Delta t) - \psi(t)]\,\boldsymbol{j} + [\chi(t+\Delta t) - \chi(t)]\,\boldsymbol{k}.$$

Este incremento está representado en la figura 196, por el vector $\overline{MM_1} = \Delta\,\boldsymbol{r}(t)$ donde $\overline{OM} = \boldsymbol{r}(t)$, $\overline{OM_1} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. Consideremos la razón $\frac{\Delta r(t)}{\Delta t}$ del incremento de la función vectorial respecto al incremento del argumento escalar; será, evidentemente, un *vector colineal con el vector $\Delta\boldsymbol{r}(t)$, puesto que se obtiene de este* último, al multiplicarlo por factor escalar $\frac{1}{\Delta t}$. Podemos escribir este vector en la forma:

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{i} + \\ + \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{j} + \frac{\chi(t+\Delta t) - \chi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{k}.$$

Si las derivadas de las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ existen para el valor elegido de t, los factores de $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ se transformarán en las derivadas $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$, tendiendo al límite, cuando $\Delta t \to 0$. Por tanto, en este caso, el límite $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ existe cuando $\Delta t \to 0$, y es igual al vector $\varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k}$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k}.$$

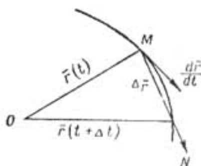


Fig. 196

El vector determinado por la última igualdad se llama *derivada* del vector $\boldsymbol{r}(t)$ respecto al argumento escalar t. La derivada se designa por el símbolo $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ o $\boldsymbol{r}'$.

Así

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}' = \varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

ó

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}. \tag{2'}$$

Determinemos la dirección del vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

Cuando $\Delta t \to 0$, el punto M_1 tiende al punto M y la dirección de la secante MM_1 coincide en el límite con la de la tangente. Por tanto, el vector de la derivada $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ está dirigido a lo largo de la tangente a la curva en el punto M. El largo del vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ se determina

por la fórmula*)

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}. \qquad (3)$$

Los resultados obtenidos permiten escribir la ecuación de la tangente a la curva

$$r = xi + yj + zk$$

en el punto $M(x, y, z)$, teniendo en cuenta que en la ecuación de la curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

La ecuación de la recta que pasa por el punto $M(x, y, z)$ tiene la forma:

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p},$$

donde X, Y, Z son coordenadas de un punto variable de la recta y m, n, p, las magnitudes proporcionales a los cosenos directores de esta recta (es decir, a las proyecciones del vector director de la recta).

Por otra parte hemos establecido que el vector

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

está dirigido, siguiendo la tangente. Por eso las proyecciones de este vector son los números proporcionales a los cosenos directores de la tangente y, por consiguiente, a los números m, n, p. La ecuación de la tangente será entonces:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \qquad (4)$$

Ejemplo 1. Escribir la ecuación de la tangente al hélice

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = amt,$$

para t arbitrario y para $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución.

$$\frac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t, \quad \frac{dz}{dt} = am.$$

---

*) Supongamos que en los puntos estudiados $\left|\frac{dr}{dt}\right| \neq 0$.

Según la fórmula (4) tenemos:

$$\frac{X-a\cos t}{-a\operatorname{sen} t}=\frac{Y-a\operatorname{sen} t}{a\cos t}=\frac{Z-amt}{am}.$$

En particular, cuando $t=\frac{\pi}{4}$, obtenemos:

$$\frac{X-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Z-am\frac{\pi}{4}}{am}.$$

Lo mismo que en el caso de una curva plana, la recta, perpendicular a la tangente y que pasa por el punto de tangencia, se llama *normal* a la curva en el espacio en el punto dado. Es evidente que existe una infinidad de normales a la curva en el espacio en el punto dado. Todas ellas se hallan en un plano perpendicular a la tangente. El plano mencionado se llama *plano normal*.

Deduzcamos la ecuación del plano normal, partiendo de la condición de su perpendicularidad respecto a la tangente (4):

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0. \tag{5}$$

Ejemplo 2. Escribir la ecuación del plano normal a la hélice en el punto donde $t=\frac{\pi}{4}$.

Solución. Utilizando los resultados del ejemplo 1 y la fórmula (5), tenemos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+m\left(Z-am\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Deduzcamos ahora la ecuación de la tangente y del plano normal para una curva en el espacio en el caso de una curva dada por las ecuaciones:

$$\Phi_1(x, y, z)=0, \qquad \Phi_2(x, y, z)=0. \tag{6}$$

Expresemos las coordenadas x, y, z de esta curva en función de un parámetro arbitrario t:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t). \tag{7}$$

Supongamos que $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ son las funciones derivables de t.

Sustituyendo x, y, z en la ecuación (6) por sus valores en función de t para los puntos de la curva, obtenemos dos identidades respecto a t:

$$\Phi_1[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]=0, \tag{8a}$$

$$\Phi_2[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]=0. \tag{8b}$$

Derivándolas respecto a t, encontramos

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0,\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.\end{array}\right\} \qquad (9)$$

De las ecuaciones (9) se deduce que

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}}=\frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}};\quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}}=\frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}. \qquad (10)$$

Supongamos que $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\neq 0$. Sin embargo, se puede demostrar que las fórmulas definitivas (11) y (12) (que aparecen más abajo) son también válidas para el caso en que esta expresión es igual a cero, siempre y cuando por lo menos uno de los determinantes que figuran en estas formulas es diferente de cero. De las igualdades (10) tenemos:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}.$$

Por tanto, en virtud de la fórmula (4), la ecuación de la tangente tendrá la forma:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}},$$

o, utilizando determinantes:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}}. \qquad (11)$$

La ecuación del plano normal será

$$(X-x)\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

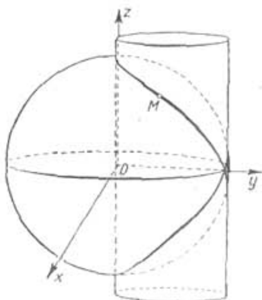


Fig. 197

Las últimas fórmulas son válidas sólo cuando en éstas por lo menos uno de los determinantes es diferente de cero. Si en un punto de la curva todos los tres determinantes

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

se anulan, el punto mencionado se llama *punto singular* de la curva en el espacio. La curva puede no tener ninguna tangente en este punto, igual que en los puntos singulares de las curvas planas (véase § 19, cap. VIII).

Ejemplo 3. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal ala curva definida por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$, y el ilindro $x^2 + y^2 = 2ry$ en el punto M $(r, r, r\sqrt{2})$ (fig. 197).

Solución.

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2,$$
$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ry,$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 2y - 2r, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Los valores de las derivadas en el punto dado M serán:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = 2r, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 2r\sqrt{2},$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Por eso, la ecuación de la tangente es

$$\frac{X-r}{0} = \frac{Y-r}{\sqrt{2}} = \frac{Z-r\sqrt{2}}{-1},$$

y la ecuación del plano normal

$$\sqrt{2}(Y-r) - (Z - r\sqrt{2}) = 0.$$

§ 3. REGLAS DE DERIVACION DE LOS VECTORES (FUNCIONES VECTORIALES)

Hemos definido la derivada del vector

$$r(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k} \tag{1}$$

es igual a

$$r'(t) = \varphi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j} + \chi'(t)\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

De esta definición se deduce inmediatamente que las reglas fundamentales de la derivación de las funciones son válidas también para los vectores.

Introduzcamos ahora ciertas fórmulas de derivación de las funciones a partir de los vectores. Estas fórmulas nos serán necesarias más adelante.

I. *La derivada de la suma de vectores es igual a la suma de derivadas de estos vectores.*

En efecto, si están dados dos vectores

$$\left.\begin{aligned} r_1(t) &= \varphi_1(t)\,\boldsymbol{i} + \psi_1(t)\,\boldsymbol{j} + \chi_1(t)\,\boldsymbol{k}, \\ r_2(t) &= \varphi_2(t)\,\boldsymbol{i} + \psi_2(t)\,\boldsymbol{j} + \chi_2(t)\,\boldsymbol{k}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

su suma será:

$$r_1(t) + r_2(t) =$$
$$= [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\boldsymbol{i} + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\,\boldsymbol{k}.$$

Según la definición, la derivada de un vector variable es:

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]' i+[\psi_1(t)+\psi_2(t)]' j+$$
$$+[\chi_1(t)+\chi_2(t)]' k$$

ó

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=[\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)]\,i+[\psi_1'(t)+\psi_2'(t)]\,j+$$
$$+[\chi_1'(t)+\chi_2'(t)]\,k=\varphi_1'(t)\,i+\psi_1'(t)\,j+\chi_1'(t)\,k+\varphi_2'(t)\,i+$$
$$+\psi_2'(t)\,j+\chi_2'(t)\,k=r_1'+r_2'.$$

Por tanto,

$$\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}=\frac{dr_1}{dt}+\frac{dr_2}{dt}. \qquad \text{(I)}$$

II. *La derivada del producto escalar de dos vectores se expresa mediante la fórmula*:

$$\frac{d(r_1r_2)}{dt}=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt}. \qquad \text{(II)}$$

En efecto, si los vectores $r_1(t)$, $r_2(t)$ están definidos por las fórmulas (3), su producto escalar es igual

$$r_1(t)\,r_2(t)=\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2+\chi_1\chi_2.$$

Por eso

$$\frac{d(r_1r_2)}{dt}=\varphi_1'\varphi_2+\varphi_1\varphi_2'+\psi_1'\psi_2+\psi_1\psi_2'+\chi_1'\chi_2+\chi_1\chi_2'=$$
$$=(\varphi_1'\varphi_2+\psi_1'\psi_2+\chi_1'\chi_2)+(\varphi_1\varphi_2'+\psi_1\psi_2'+\chi_1\chi_2')=$$
$$=(\varphi_1'i+\psi_1'j+\chi_1'k)(\varphi_2i+\psi_2j+\chi_2k)+$$
$$+(\varphi_1i+\psi_1j+\chi_1k)(\varphi_2'i+\psi_2'j+\chi_2'k)=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt}$$

Queda así demostrado el teorema.

De la fórmula (II) se deduce siguiente corolario importante.

Corolario: *Si e es un vector unitario, es decir,* $|e|=1$, *su derivada es un vector perpendicular al vector unitario.*

Demostración: Si e es un vector unitario, entonces:

$$ee=1.$$

Derivemos ambos miembros de la última igualdad respecto a t:

$$e\frac{de}{dt}+\frac{de}{dt}e=0,$$

ó

$$2e\frac{de}{dt}=0,$$

es decir, el producto escalar

$$e\frac{de}{dt}=0,$$

lo que significa que el vector $\frac{de}{dt}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.

III. *Si $f(t)$ es una función escalar y $\bar{r}(t)$ es función vectorial, entonces la derivada del producto $f(t)\cdot \boldsymbol{r}(t)$ se expresa por la fórmula*:

$$\frac{d(f\bar{r})}{dt}=\frac{df}{dt}\bar{r}+f\frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{III}$$

Demostración:

Si $\bar{r}(t)$ se determina por la fórmula (I), entonces $f(t)\bar{r}(t)=$ $=f(t)\,\varphi(t)\,\boldsymbol{i}+f(t)\,\psi(t)\,\boldsymbol{j}+f(t)\,\chi(t)\,\boldsymbol{k}$.

Según la fórmula (2), tenemos:

$$\frac{d[f(t)\cdot\bar{r}(t)]}{dt}=\left(\frac{df}{dt}\varphi+f\frac{d\varphi}{dt}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{df}{dt}\psi+f\frac{d\psi}{dt}\right)\boldsymbol{j}+$$

$$\left(\frac{df}{dt}\chi+f\frac{d\chi}{dt}\right)\boldsymbol{k}=\frac{df}{dt}(\varphi\boldsymbol{i}+\psi\boldsymbol{j}+\chi\boldsymbol{k})+$$

$$+f\left(\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{d\psi}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{d\chi}{dt}\boldsymbol{k}\right)=\frac{df}{dt}\bar{r}+f\frac{d\bar{r}}{dt},$$

lo que se trataba de demostrar.

Si $f(t)=a=\text{const}$, entonces $\frac{df}{dt}=0$ y se deduce la regla siguiente.

IV. *El factor constante numérico se puede sacar fuera del signo de la derivada*

$$\frac{d(a\cdot\bar{r}(t))}{dt}=a\frac{d\bar{r}}{dt}=a\boldsymbol{r}'(t). \tag{IV}$$

De modo análogo al empleado en la fórmula II se demuestra que:

V. *La derivada del producto vectorial de los vectores* $\bar{r}_1(t)$ *y* $\bar{r}_2(t)$, *se determina por la fórmula:*

$$\frac{d(\bar{r}_1 x \ \bar{r}_2)}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} x \ \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \ x \ \frac{d\bar{r}_2}{dt}. \qquad \text{(V)}$$

§ 4. DERIVADAS PRIMERA Y SEGUNDA DE UN VECTOR RESPECTO A LA LONGITUD DEL ARCO. CURVATURA DE LA CURVA. NORMAL PRINCIPAL. VELOCIDAD Y ACELERACION DEL PUNTO DURANTE EL MOVIMIENTO CURVILINEO

La longitud del arco*) de una curva en el espacio $\widehat{M_0A} = s$ se determina de manera semejante a la definición de una curva plana (fig. 198). Cuando el punto variable $A(x, y, z)$ se desplaza a lo largo

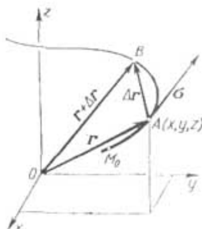


Fig. 198

de la curva, la longitud del arco s varía y, viceversa, cuando s varía las coordenadas x, y, z del punto variable A de la curva varían también. Por tanto, se puede considerar las coordenadas x, y, z del punto variable A de la curva como funciones de la longitud del arco s:

$$x = \varphi(s),$$
$$y = \psi(s),$$
$$z = \chi(s).$$

En estas ecuaciones paramétricas de la curva el parámetro es la longitud del arco s.

---

*) La longitud del arco de una curva en el espacio se determina del modo semejante a la de una curva plana (véase § 1, cap. VI y § 3 cap. XII).

El vector $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ se expresará correspondientemente en la forma:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(s)\,\boldsymbol{i} + \psi(s)\,\boldsymbol{j} + \chi(s)\,\boldsymbol{k},$$

ó

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),$$

es decir, el vector $\boldsymbol{r}$ es una función de la longitud del arco s.

Aclaremos el sentido geométrico de la derivada $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. De la figura 198 se deducen las siguientes igualdades:

$$\widehat{M_0A} = s, \quad \widehat{AB} = \Delta s, \quad \widehat{M_0B} = s + \Delta s,$$
$$\overline{OA} = \boldsymbol{r}(s), \quad \overline{OB} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s),$$
$$\overline{AB} = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s),$$
$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}}.$$

Hemos visto, en el § 2, que el vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$ está orientado, siguiendo la tangente a la curva en el punto A, en dirección del crecimiento de s. Por otra parte, tenemos la igualdad: $\lim \left| \frac{\overline{AB}}{\widehat{AB}} \right| = 1$ [límite de la razón de longitud de la cuerda con respecto al largo del arco*)]. Por consiguiente, $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ es un vector *unitario* dirigido siguiendo a la tangente; designemos este vector por $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

Si el vector $\boldsymbol{r}$ está dado por las proyecciones:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

entonces:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{dx}{ds}\,\boldsymbol{i} + \frac{dy}{ds}\,\boldsymbol{j} + \frac{dz}{ds}\,\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

además,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

---

*) Esta correlación, como hemos demostarado (§ 1, cap. VI) para una curva plana, se verifica, también para una curva en el espacio $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}$, si las derivadas de las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$ y $\chi(t)$ son continuas y no se anulan simultáneamente.

Examinemos ahora la segunda derivada $\frac{d^2r}{ds^2}$ de la función vectorial r, es decir, de la derivada $\frac{dr}{ds}$ y demos el significado geométrico de esta segunda derivada.

De la fórmula (2) se deduce:

$$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{dr}{ds}\right]=\frac{d\sigma}{ds}.$$

Por tanto, debemos calcular $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$

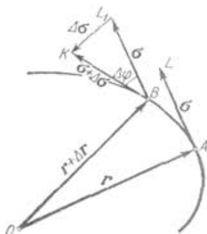


Fig. 199

En la figura 199 se ve que $AB=\Delta s$, $\overline{AL}=\sigma$, $\overline{BK}=\sigma+\Delta\sigma$. Tracemos del punto B el vector $\overline{BL_1}=\sigma$. Del triángulo BKL_1 tenemos:

$$\overline{BK}=\overline{BL_1}+\overline{L_1K}$$

o,

$$\sigma+\Delta\sigma=\sigma+\overline{L_1K}.$$

Por tanto, $L_1K=\Delta\sigma$. *Puesto que, según lo demostrado, la* longitud del vector σ no cambia, entonces $|\sigma|=|\sigma+\Delta\sigma|$, por consiguiente el triángulo BKL_1 es isósceles.

El ángulo $\Delta\varphi$ en el vértice de este triángulo es el ángulo de rotación *de la tangente a la curva, cuando pasa del punto A al punto B*, es decir, el ángulo corresponde al incremento de la longitud del arco Δs. Del triángulo BKL_1 tenemos:

$$L_1K=|\Delta\sigma|=2|\sigma|\left|\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}\right|=2\left|\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

(puesto que $|\sigma|=1$).

Dividamos los dos miembros de la última ecuación por Δs:

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Tomemos límites en ambos miembros de esta igualdad para $\Delta s \to 0$. En el primer miembro obtenemos:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|.$$

Luego,

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| = 1,$$

puesto que en el caso dado consideramos las curvas que tienen como límite $\lim\limits_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ y, por consiguiente $\Delta\varphi \to 0$ cuando $\Delta s \to 0$.

Así, después de tomar límites, tenemos:

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|. \tag{4}$$

La razón (en valor absoluto) del ángulo $\Delta\varphi$ de rotación de la tangente con respecto a la longitud Δs del arco AB, cuando se pasa del punto A al punto B se llama (igual que para una curva plana) *curvatura media* de la línea dada en el segmento AB:

$$\text{curvatura media} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

El límite de la curvatura media, cuando $\Delta s \to 0$, se llama *curvatura* de la línea en el punto A y se designa por K:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

De la igualdad (4) se deduce que $\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = K$, es decir, la longitud de la derivada del vector unitario*) de la tangente respecto a la

*) Recordemos que la derivada de un **vector** es también **vector** y por eso se puede hablar de la **longitud** de la derivada.

longitud del arco es igual a la curvatura de la línea en el punto dado. Puesto que σ es un vector unitario, su derivada $\frac{d\sigma}{ds}$ es perpendicular a éste (véase § 3, cap. IX, corolario).

Así, el vector $\frac{d\sigma}{ds}$ está dirigido, siguiendo la perpendicular al vector de la tangente y su longitud es igual a la curvatura de la curva en este punto.

Definición: Una recta que coincide en dirección con el vector $\frac{d\sigma}{ds}$ y pasa por el punto correspondiente de la curva se llama *normal principal* de la curva en el punto dado. Designemos por $\boldsymbol{n}$ el vector unitario de esta dirección.

Puesto que la longitud del vector $\frac{d\sigma}{ds}$ es igual a la curvatura K de la curva, tenemos:

$$\frac{d\sigma}{ds} = K\boldsymbol{n}.$$

La magnitud $\frac{1}{K}$, inversa a la curvatura, se llama *radio de curvatura* de esta línea en el punto dado y se designa por R, es decir, $\frac{1}{K} = R$. Entonces, se puede escribir:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}. \tag{5}$$

De la fórmula (5) se deduce:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2. \tag{6}$$

Pero,

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\boldsymbol{k}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{6'}$$

La última fórmula permite calcular la curvatura en un punto cualquiera, de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas, en las que el parámetro es la longitud s del arco, (es decir, cuando el

radio vector del punto variable de esta curva es una función de la longitud del arco).

Examinemos el caso en que el radio vector r es función de un parámetro arbitrario t:

$$r = r(t).$$

Supongamos que en este caso, la longitud del arco s es una función del parámetro t. El cálculo de la curvatura se efectúa del modo siguiente:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Puesto que*)

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1;$$

entonces:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

Derivando los dos miembros y dividiéndolos por dos, tenemos:

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{9}$$

De la fórmula (7) se deduce:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

Derivando respecto a s ambos miembros de la última igualdad tenemos:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{dr}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}.$$

---

*) Esta igualdad se deduce de $\left|\frac{dr}{ds}\right| = \lim_{\Delta s=0}\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$. Pero Δr es la cuerda del arco de la longitud Δs. Por eso, $\frac{|\Delta r|}{|\Delta s|}$ tiende a 1, cuando $\Delta s \to 0$.

Introduciendo en la fórmula (6) la expresión encontrada para $\frac{d^2 r}{ds^2}$, obtenemos:

$$\frac{1}{R^2}=\left[\frac{d^2 r}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{dr}{dt}\frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2=$$

$$=\frac{\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-2\frac{d^2 r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt^2}\right)^6}.$$

Expresando $\frac{ds}{dt}$ y $\frac{d^2 s}{dt^2}$ en función de las derivadas de $r(t)$, a partir de las fórmulas (8) y (9), obtenemos*):

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{10}$$

La fórmula (10) se puede escribir también en la forma**):

$$K^2=\frac{1}{R^2}=\frac{\left[\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2 r}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{11}$$

---

*) Transformemos el denominador del modo siguiente:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3=\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3.$$

Aquí no podemos escribir $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$, puesto que $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ designa el cuadrado escalar del vector $\frac{dr}{dt}$, mientras que $\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3$ designa el cubo del número $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$. La expresión $\left(\frac{dr}{dt}\right)^6$ no tiene sentido.

**) Hemos aprovechado la identidad $a^2b^2-(ab)^2=(a\times b)^2$. Para demostrar que esta identidad es válida es suficiente escribirla en la forma:

$$a^2b^2-(ab\cos\varphi)^2=(ab\operatorname{sen}\varphi)^2.$$

Hemos obtenido la fórmula que permite calcular la curvatura de la curva en cada uno de sus puntos, dada por las ecuaciones paramétricas arbitrarias.

Si, en un caso particular, la curva es plana y está situada en el plano Oxy, sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$
$$z = 0.$$

Sustituyendo las expresiones de x, y, z en la fórmula (11), obtenemos la fórmula ya conocida (véase cap. VI), que determina la curvatura de una curva plana dada por las ecuaciones paramétricas:

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Ejemplo. Hallar la curvatura de la hélice

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\,\mathrm{sen}\,t + \mathbf{k}\,amt$$

en un punto arbitrario.

Solución:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}a\,\mathrm{sen}\,t + \mathbf{j}a\cos t + \mathbf{k}am,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{i}a\cos t - \mathbf{j}a\,\mathrm{sen}\,t,$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}a^2m\,\mathrm{sen}\,t - \mathbf{j}a^2m\cos t + \mathbf{k}a^2,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 = a^4(m^2+1),$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + a^2\cos^2 t + a^2m^2 = a^2(1+m^2).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4(m^2+1)}{[a^2(1+m^2)]^3} = \frac{1}{a^2(1+m^2)^2},$$

de donde

$$R = a(1+m^2) = \text{const}.$$

Así, el radio de curvatura de la hélice es constante.

Observación. Siempre se puede suponer que una curva plana está situada en el plano Oxy (lo que se puede demostrar fácilmente, transformando el sistema de coordenadas). Por consiguiente, en el plano Oxy, $z = 0$; pero en este caso, $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$, y, por tanto, el

vector n está situado también en el plano Oxy. De aquí se deduce una conclusión importante: la normal principal de una curva plana está situada en el plano de esta curva.

Velocidad de un punto en el movimiento curvilíneo. Si un punto móvil en un instante t se encuentra en el punto M, determinado por el radio vector $\overline{OM} = \bar{r}(t)$ (fig. 196), y en otro instante $t + \Delta t$, en el punto M_1 determinado por el radio vector $\overline{OM_1} = \bar{r}(t + \Delta t)$, entonces el vector $\overline{MM_1}$ se llama *vector de desplazamiento del punto*. La razón del vector de desplazamiento $\overline{MM_1}$ respecto al incremento correspondiente del tiempo Δt se llama *velocidad media del* punto durante un lapso

$$\bar{v}_{\text{med}} \neq \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \overline{MN}.$$

El vector de la velocidad media está orientado a lo largo de la cuerda MM_1 (fig. 196) en la dirección del movimiento del punto (durante el movimiento rectilíneo la dirección del vector coincide con la trayectoria).

La velocidad del punto $\frac{dr}{dt}$ en el instante dado se determina por:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{V}_{\text{med}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

es decir,

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{12}$$

Por consiguiente, se puede enunciar lo siguiente:

La velocidad del punto en un instante dado es igual a la primera derivada del radio vector de este punto respecto al tiempo.

En virtud de la fórmula (2), las proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas son:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Determinemos el módulo de la velocidad según la fórmula (3):

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{13}$$

Introduzcamos la longitud s del arco (como lo hemos hecho al principio del presente párrafo) y consideremos s como función del

tiempo *t*. Entonces podemos escribir la fórmula 12:

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\bar{\sigma}\cdot v \tag{14}$$

donde, $v=\frac{ds}{dt}$ es valor absoluto de la velocidad, $\bar{\sigma}$ es vector unitario orientado a lo largo de la tangente en la dirección del movimiento.

Aceleración de un punto en el movimiento curvilíneo. En el § 25, capítulo III, hemos considerado la aceleración del movimiento rectilíneo. Análogamente, en el movimiento curvilíneo, la segunda derivada del vector de la velocidad respecto al tiempo se llama *aceleración $\bar{w}$ de un punto*:

$$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}; \tag{15}$$

pero

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Por consiguiente,

$$\bar{w}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{16}$$

A partir de la fórmula (14) obtenemos:

$$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d(v\bar{\sigma})}{dt}.$$

Desarrollando la última derivada según la fórmula (III) § 3, tenemos:

$$\bar{w}=\frac{dv}{dt}\bar{\sigma}+v\frac{d\bar{\sigma}}{dt}. \tag{17}$$

Transformemos la derivada $\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$, usando la fórmula (5):

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt}=\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{\bar{n}}{R}v.$$

Introduciendo la expresión de $\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$ en la igualdad (17), obtenemos en definitiva:

$$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\bar{\sigma}+v^2\frac{\bar{n}}{R}. \tag{18}$$

Aquí, $\bar{\sigma}$ es el vector unitario orientado a lo largo de la tangente en dirección del movimiento, $\bar{n}$ es un vector unitario dirigido a lo largo de la normal principal.

Por consiguiente, se puede interpretar la fórmula (18) así: la proyección de la aceleración de un punto sobre la tangente es igual a la primera derivada del valor absoluto de la velocidad; la proyección de la aceleración sobre la normal principal es igual al cuadrado de la velocidad dividido por el radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado.

Puesto que los vectores $\bar{\sigma}$ y $\bar{n}$ son mutuamente perpendiculares, el módulo de aceleración se determina por la fórmula:

$$w=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \tag{19}$$

§ 5. PLANO OSCULADOR. BINORMAL. TORSION

Definición 1. El plano que pasa por la tangente y la normal principal a una curva dada en el punto A se llama *plano osculador* en este punto A. Cuando una curva es plana, el plano osculador coincide con el plano de la curva. Si la curva no es plana, dos planos osculadores en los puntos P y P_1 de la curva, forman entre sí un diedro μ. Cuanto mayor es el ángulo μ, tanto más la curva se diferencia de la curva plana. Con el fin de precisar este problema introduzcamos la definición siguiente.

Definición 2. La normal a la curva, perpendicular al plano osculador, se llama *binormal*.

Tomemos un vector unitario $\boldsymbol{b}$ sobre la binormal y dirijámoslo de tal modo que los vectores $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ formen una terna de misma orientación que los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ de los ejes de coordenadas (figs. 200, 201).

En virtud de la definición de los productos vectorial y escalar de vectores tenemos:

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}; \quad \boldsymbol{bb}=1. \tag{1}$$

Hallemos la derivada $\frac{db}{ds}$. Según la fórmula (IV) § 3,

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{d(\bar{\sigma}\times\boldsymbol{n})}{ds}=\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\times\boldsymbol{n}+\bar{\sigma}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{2}$$

Pero $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{R}$ (véase § 4), por eso:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\times\boldsymbol{n}=\frac{1}{R}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=0$$

y fórmula (2) toma la forma:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \sigma \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{3}$$

Partiendo de la definición de producto vectorial se deduce que el vector $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ es perpendicular al vector de la tangente $\boldsymbol{\sigma}$. Por otra



Fig. 200

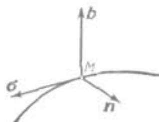


Fig. 201

parte, $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ es perpendicular a $\boldsymbol{b}$ puesto que $\boldsymbol{b}$ es un vector unitario (véase § 3, corolario).

Por tanto, el vector $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ es perpendicular también a $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{b}$, es decir, es colineal al vector $\boldsymbol{n}$.

Designemos por $\frac{1}{T}$ la longitud del vector $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$, es decir, pongamos:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right| = \frac{1}{T}.$$

Entonces,

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{T}\boldsymbol{n}.$$

La magnitud $\frac{1}{T}$ se llama *torsión* de la curva dada.

El diedro μ, formado por los planos osculadores correspondientes a dos puntos de la curva es igual al ángulo formado por las binormales. Análogamente a la formula (4) § 4 cap. IX, se puede escribir:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Así, la torsión de la curva en el punto A, en valor absoluto, es igual al límite a que tiende la razón del ángulo μ formado por los

planos osculadores en el punto A y en el punto vecino B, respecto a la longitud $|\Delta s|$ del arco AB, cuando $\Delta s \to 0$.

Si la curva es **plana**, el plano osculador no varía su dirección y, por tanto, la torsión es igual a cero.

De la definición de torsión se deduce que esta magnitud caracteriza la desviación de la curva en el espacio respecto a la curva plana. La magnitud T se llama *radio de torsión* de la curva.

Hallemos la fórmula para calcular la torsión. De las fórmulas (3) y (4) se deduce:

$$\frac{1}{T} n = \sigma \times \frac{dn}{ds}.$$

Multiplicando (escalarmente) ambos miembros por n obtenemos:

$$\frac{1}{T} nn = n \left[\sigma \times \frac{dn}{ds} \right].$$

El segundo miembro de esta igualdad es el llamado producto mixto (triple) de tres vectores n, σ y $\frac{dn}{ds}$. Como sabemos, tal producto no varía por la permutación de los factores en orden circular. Como $nn = 1$, escribamos la última igualdad en la forma:

$$\frac{1}{T} = \sigma \left[\frac{dn}{ds} \times n \right]$$

ó

$$\frac{1}{T} = -\sigma \left[n \times \frac{dn}{ds} \right]. \qquad (5)$$

Pero, como $n = R \frac{d^2 r}{ds^2}$, entonces:

$$\frac{dn}{ds} = R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \cdot \frac{d^2 r}{ds^2}$$

y

$$\left[n \times \frac{dn}{ds} \right] = R \frac{d^2 r}{ds^2} \times \left\{ R \frac{d^3 r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2} \right\} =$$

$$= R^2 \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right] + R \frac{dR}{ds} \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^2 r}{ds^2} \right].$$

Puesto que el producto vectorial de un vector por sí mismo es igual

a cero,

$$\left[\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^2r}{ds^2}\right]=0.$$

Así,

$$\left[n\times\frac{dn}{ds}\right]=R^2\left[\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right].$$

Notemos que $\sigma=\frac{dr}{ds}$; según la igualdad (5), de donde:

$$\frac{1}{T}=-R^2\frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right]. \tag{6}$$

Si el vector r está expresado en función de un parámetro arbitrario t, se puede demostrar*) (utilizando el mismo procedimiento

---

*) Efectivamente,

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Derivemos una vez más esta igualdad respecto a t:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Volvemos a derivar respecto a t:

$$\frac{d^3r}{dt^3}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d^2r}{ds^2}2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}=$$

$$=\frac{d^3r}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{d^2r}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Formemos el producto mixto (triple)

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right)=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}\left\{\left[\frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{d^3r}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+3\frac{d^2r}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{dr}{ds}\frac{d^3r}{dt^3}\right]\right\}.$$

Desarrolando este producto según la regla de multiplicación de los polinomios y omitiendo todos los términos que contengan por lo menos dos factores vectoriales idénticos (puesto que el producto mixto de tres factores en el cual aunque dos factores son idénticos es igual a cero) obtenemos:

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right)=\frac{dr}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Finalmente

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \text{ ó } \left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3,$$

obteniendo así la ecuación buscada.

que en el párrafo anterior) que

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right]=\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left[\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right]}{\left\{\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}.$$

Introduciendo esta expresión en la fórmula (6) y sustituyendo R^2 por su expresión según la fórmula (11) § 4, tenemos en definitiva:

$$\frac{1}{T}=-\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left[\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right]}{\left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]}. \tag{7}$$

Esta fórmula permite calcular la torsión en cualquier punto de la curva, dada por sus ecuaciones paramétricas en el caso de un parámetro arbitrario t.

Como conclusión anotemos que las fórmulas que expresan las derivadas de los vectores $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$, se llaman *fórmulas de Serret-Frenet*:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{R},\qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{T},\qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}-\frac{\boldsymbol{b}}{T}.$$

La última de ellas se obtiene así:

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\sigma},$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{d(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\sigma})}{ds}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{T}\times\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}\times\frac{\boldsymbol{n}}{R}=$$

$$=\frac{1}{T}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{R}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}.$$

Pero,

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}=-\boldsymbol{b};\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{\sigma}.$$

Por eso,

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{b}}{T}-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}.$$

Ejempo: Calcular la torsión del hélice

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos t+\boldsymbol{j}a\,\mathrm{sen}\,t+\boldsymbol{k}\,\mathrm{amt}.$$

Solución:

$$\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right]=\begin{vmatrix} -a\,\text{sen}\,t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\,\text{sen}\,t & 0 \\ a\,\text{sen}\,t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}=a^3m,$$

$$\left[\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right]^2=a^4(1+m^2) \text{ (véase el ejemplo § 4).}$$

Por tanto:

$$T=-\frac{a^4(1+m^2)}{a^3m}=-\frac{a(1+m^2)}{m}.$$

§ 6. PLANO TANGENTE Y NORMAL A UNA SUPERFICIE

Sea

$$F(x,\ y,\ z)=0, \tag{1}$$

la ecuación de una superficie.

Introduzcamos las siguientes definiciones.

Definición 1. Si una recta es tangente a una curva cualquiera situada sobre una superficie y pasa por un punto P, esta recta se llama *tangente* a la superficie en el punto $P(x, y, z)$.

Puesto que una infinidad de curvas, trazadas sobre la superficie, pasan por el punto P, en general, existe en este punto, igualmente una infinidad de tangentes a esta superficie.

Introduzcamos las nociones sobre los puntos singulares y simples de una superficie $F(x, y, z)=0$.

Si en el punto $M(x, y, z)$ las tres derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ son iguales a cero o, por lo menos, una de estas derivadas no existe, entonces M es un punto **singular** de la superficie. Si en el punto $M(x, y, z)$ las tres derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ existen y son continuas y por lo menos una de éstas es distinta de cero entonces M es un punto *simple* de la superficie.

Ahora podemos enunciar el teorema siguiente:

Teorema: *Todas las tangentes rectas a la superficie dada* (1) *en su punto simple P pertenecen a un mismo plano.*

Demostración: Estudiemos en la superficie una curva L (fig. 202) que pasa por el punto dado P de una superficie.

Sean

$$x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ z=\chi(t), \tag{2}$$

las ecuaciones paramétricas de esta curva.

La tangente a esta curva será una tangente a la superficie. Las ecuaciones de esta tangente son:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Pongamos las expresiones (2) en la ecuación (1) y obtengamos una identidad respecto a t, puesto que la curva (2) está trazada sobre la superficie (1). Derivando esta identidad respecto a t obtenemos*):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0. \tag{3}$$

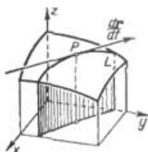


Fig. 202

Estudiemos ahora los vectores N y $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ que pasan por el punto P:

$$\boldsymbol{N}=\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Las proyecciones de este vector $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ dependen de las coordenadas x, y, z del punto P. Notemos que estas proyecciones no se reducen a cero simultáneamente en el punto P, puesto que P *es un punto simple*

$$|\boldsymbol{N}|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\neq 0.$$

El vector

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \tag{5}$$

es tangente a la curva que pasa por el punto P y que además está trazada sobre la superficie.

---

*) Utilicemos aquí la regla para derivar funciones complejas de tres variables. Esta regla es válida en el caso dado, puesto que todas las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ según la hipótesis, son continuas.

Se puede calcular las proyecciones de este vector a partir de las ecuaciones (2), si damos al parámetro t el valor que corresponde al punto P. Calculemos el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{N}$ y $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Este producto escalar es igual a la suma de los productos de las proyecciones correspondientes:

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

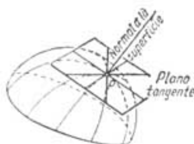


Fig. 203

En virtud de la igualdad (3) el segundo miembro es igual a cero por consiguiente:

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0.$$

De la última ecuación se deduce que el vector $\boldsymbol{N}$ es perpendicular al vector de la tangente $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ a la curva (2) en el punto P. La demostración dada es válida para cualquier curva (2) trazada sobre la superficie, y que pasa por el punto P. Por consiguiente, todas las tangentes a esta superficie en el punto P son perpendiculares respecto a un mismo vector $\boldsymbol{N}$, por lo que todas las tangentes pertenecen a un mismo plano perpendicular al vector $\boldsymbol{N}$. El teorema queda demostrado.

Definición 2. El plano, formado por todas las tangentes en un punto P a las curvas trazadas sobre una superficie que pasan por este punto, se llama *plano tangente* a la superficie en el punto P (fig. 203).

Notemos que en los puntos singulares de la superficie puede no existir el plano tangente. En tales puntos las rectas tangentes a la superficie pueden no pertenecer a un mismo plano. Así, por ejemplo, el vértice de una superficie cónica es un punto singular. Las tangentes a la superficie cónica en este punto no pertenecen a un mismo plano, formando también una superficie cónica.

Escribamos la ecuación del plano tangente a la superficie (1) en un punto simple. Este plano es perpendicular al vector (4), su ecuación tiene la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

Si la ecuación de superficie es

$$z=f(x,\ y),\quad \text{ó}\quad z-f(x,\ y)=0,$$

entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y},\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

y la ecuación del plano tangente es

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y).$$

Observación: Si hacemos en la fórmula (6′) $X-x=\Delta x$, $Y-y=\Delta y$, obtenemos:

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y;$$

su segundo miembro es la diferencial total de la función $z=f(x,\ y)$. Por tanto, $Z-z=dz$. Así, la diferencial total de una función de dos variables en el punto $M(x,\ y)$, que corresponde a los incrementos Δx y Δy de las variables independientes x e y, es igual al *incremento correspondiente de la cota* (z) *del plano tangente a la* superficie que representa la gráfica de la función dada.

Definición 3. La recta, trazada por el punto $P(x,\ y,\ z)$, de la superficie (1) de modo perpendicular al plano tangente se llama *normal* a superficie en este punto (fig. 203).

Escribamos las ecuaciones de la normal. Puesto que su dirección coincide con la del vector N, sus ecuaciones son

$$\frac{X-x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.\tag{7}$$

Si la ecuación de la superficie es $z=f(x,\ y)$, ó
$z-f(x,\ y)=0$,
las ecuaciones de la normal son:

$$\frac{X-x}{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{1}.$$

Observación: Sea $F(x, y, z) = 0$ la superficie del nivel para una función de tres variables $u = u(x, y, z)$, es decir,

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0.$$

Es evidente que el vector N, determinado por la fórmula (4) y dirigido, siguiendo la normal a la superficie del nivel $F = u(x, y, z,) - C = 0$, será:

$$N = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

es decir,

$$N = \operatorname{grad} u.$$

Así hemos comprobado que *el gradiente de la función $u(x, y, z)$ está dirigido, siguiendo la normal, a la superficie del nivel que pasa por el punto dado.*

Ejemplo. Escribir la ecuación del plano tangente y ecuaciones de la normal a la superficie de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $P(1, 2, 3)$.

Solución.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

para $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6.$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \quad ó \quad x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

Las ecuaciones de la normal son:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$$

ó

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Ejercicios para el capítulo IX

Hallar las derivadas de los vectores **1.** $\mathbf{r} = \mathbf{i} \operatorname{cotg} t + \mathbf{j} \operatorname{arctg} t$. *Resp.* $\mathbf{r}' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2} \mathbf{j}$. **2.** $\mathbf{r} = \mathbf{i} e^{-t} + \mathbf{j} 2t + \mathbf{k} \ln t$. *Resp.* $\mathbf{r}' = -\mathbf{i} e^{-t} + 2\mathbf{j} + \frac{\mathbf{k}}{t}$. **3.** $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} - \frac{\mathbf{j}}{t} + \frac{\mathbf{k}}{t^2}$. *Resp.* $\mathbf{r}' = 2t\mathbf{i} + \frac{\mathbf{j}}{t^2} - \frac{2\mathbf{k}}{t^3}$.

4. Hallar el vector de la tangente, la ecuación de la tangente y la ecuación del plano normal a la curva $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el punto $(3, 9, 27)$. *Respuesta*: $\mathbf{r}^1 = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 27\mathbf{k}$; la tangente es: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; el plano normal es: $x + 6y + 27z = 786$.

5. Hallar el vector de la tangente, las ecuaciones de la tangente y la ecuación del plano normal a la curva: $r = i\cos^2\frac{t}{2} + \frac{1}{2} j \operatorname{sen} t + k \operatorname{sen}\frac{t}{2}$. *Respuesta.* $r' = -\frac{1}{2} i \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} j \cos t + \frac{1}{2} k \cos\frac{t}{2}$; la ecuación de la tangente es $\frac{X - \cos^2\frac{t}{2}}{-\operatorname{sen} t} = \frac{Y - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{Z - \operatorname{sen}\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$; la ecuación del plano normal: $+X\operatorname{sen} t - Y\cos t - Z\cos\frac{t}{2} = -x\operatorname{sen} t + y\cos t + z\cos\frac{t}{2}$, donde x, y, z son las coordenadas de un punto de la curva por el que pasa el plano normal $\left(\text{es decir } x = \cos^2\frac{t}{2},\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t,\ z = \operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)$.

6. Hallar las ecuaciones de la tangente a la curva $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ y cosenos de los ángulos que forma la tangente con los ejes de coordenadas. *Respuesta.* $\frac{X - X_0}{\operatorname{sen}\frac{t_0}{2}} = \frac{Y - Y_0}{\cos\frac{t_0}{2}} = \frac{Z - Z_0}{\operatorname{cotg}\frac{t_0}{2}}$, $\cos\alpha = \operatorname{sen}^2\frac{t_0}{2}$; $\cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t_0$; $\cos\gamma = \cos\frac{t_0}{2}$.

7. Hallar la ecuación de un plano normal a la curva $z = x^2 - y^2$, $y = x$ en el origen de coordenadas. **Indicación.** Expresar la curva mediante ecuaciones paramétricas. *Respuesta.* $x + y = 0$.

8. Hallar σ, n, b en el punto $t = \frac{\pi}{2}$ para la curva $r = i(\cos t + \operatorname{sen}^2 t) + j\operatorname{sen} t(1 - \cos t) - k\cos t$. *Respuesta.* $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i + j + k)$; $n = \frac{-5i - 4j - k}{\sqrt{42}}$; $b = \frac{i - 2j + 3k}{\sqrt{14}}$.

9. Hallar las ecuaciones de la normal principal y de la binormal a la curva $x = \frac{t^4}{4}$; $y = \frac{t^3}{3}$; $z = \frac{t^2}{2}$ en el punto (x_0, y_0, z_0). *Respuesta.* $\frac{x - x_0}{t_0^3 + 2t_0} = \frac{y - y_0}{1 - t_0^4} = \frac{z - z_0}{-2t_0^3 - t_0}$; $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2t_0} = \frac{z - z_0}{t_0^2}$.

10. Hallar la ecuación de un plano osculador a la curva $y^2 = x$; $x^2 = z$ en el punto $M(1, 1, 1)$. *Respuesta.* $6x - 8y - z + 3 = 0$.

11. Hallar el radio de curvatura de la curva dada por las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x + y - z = 0$. *Respuesta.* $R = 2$.

12. Hallar el radio de torsión de la curva: $r = i\cos t + j\operatorname{sen} t + k\frac{e^t - e^{-t}}{2}$. *Respuesta.* $T = \frac{(e^t + e^{-t})^2}{2(e^t - e^{-t})}$.

13. Hallar el radio de curvatura y de torsión de la curva $r = t^2 i + 2t^3 j$. *Respuesta.* $R = \frac{2}{3} t(1 + 9t^2)^{3/2}$, $T = \infty$.

14. Demostrar que la curva $r = (a_1t^2 + b_1t + c_1)\,i + (a_2t^2 + b_2t + c_2)\,j + (a_3t^2 + b_3t + c_3)\,k$ es plana. *Respuesta:* $r''' \equiv 0$, por lo que la torsión es nula.

15. Hallar la curvatura y la torsión de la curva $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$. *Respuesta*. La curvatura es igual a $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, la torsión es igual a $\frac{-\sqrt{2}}{(x-y)^2}$.

16. Hallar la curvatura y la torsión de la curva $x=e^{-t}\operatorname{sen} t$, $y=e^{-t}\cos t$; $z=e^t$. *Respuesta*. La curvatura es igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}e^t$, la torsión es igual a $\frac{1}{3}e^t$.

17. Hallar la ecuación de un plano tangente al hiperboloide $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ en el punto (x_1, y_1, z_1). *Respuesta*. $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-\frac{z_1z}{c^2}=1$.

18. Hallar la ecuación de la normal a la superficie $x^2-4y^2+2z^2=6$ en el punto $(2, 2, 3)$. *Respuesta*. $y+4x=10$; $3x-z=3$.

19. Hallar la ecuación de un plano tangente a la superficie $z=2x^2+4y^2$ en el punto $M(2, 1, 12)$. *Respuesta*. $8x+8y-z=12$.

20. Trazar un plano tangente a la superficie $x^2+2y^2+z^2=1$ de modo que sea paralelo al plano $x-y+2z=0$. *Respuesta*. $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$.

CAPITULO X

INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1. FUNCION PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

En el capítulo III hemos estudiado el problema siguiente: dada una función $F(x)$, hallar su derivada, es decir, la función $f(x) = F'(x)$.

En el capítulo presente consideremos el problema inverso: dada *una función $f(x)$, es preciso hallar una función $F(x)$* cuya derivada sea igual a $f(x)$, es decir,

$$F'(x) = f(x).$$

Definición 1. *Si en todos los puntos del segmento $[a, b]$ se verifica la ecuación*

$$F'(x) = f(x)$$

la función $F(x)$ se llama primitiva de la función $f(x)$ sobre este segmento.

Ejemplo. Hallar una función primitiva de la función $f(x)=x^2$. De la definición de función primitiva se deduce que la función $F(x)=\frac{x^3}{3}$ es primitiva de la $f(x)$, puesto que $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$.

Es fácil ver que si la función dada $f(x)$ tiene una función primitiva, ésta no es la única. Así, en el ejemplo citado como funciones *primitivas podrían figurar las siguientes:* $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$, o, en general $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (donde C es una constante arbitraria) puesto que:

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2.$$

Por otra parte se puede demostrar que las funciones del tipo $\frac{x^3}{3}+C$ abarcan todas las funciones primitivas de la función x^2. Esto se deduce del teorema siguiente.

Teorema: *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la funcion $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, su diferencia es una constante.*

Demostración. En virtud de la definición de la función primitiva tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x)=f(x) \\ F_2'(x)=f(x) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

para todo valor de x en el segmento $[a, b]$.

Designemos:

$$F_1(x)-F_2(x)=\varphi(x). \qquad (2)$$

Según las igualdades (1), tenemos:

$$F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ó

$$\varphi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]'\equiv 0$$

para todo valor de x en el segmento $[a, b]$. Pero, de la igualdad $\varphi'(x)=0$ se deduce que $\varphi(x)$ es una constante.

En efecto, apliquemos el teorema de Lagrange (véase § 2, cap. IV) a la función $\varphi(x)$ que es, evidentemente, continua y derivable en el segmento $[a, b]$. En virtud del teorema de Lagrange, para todo x arbitrario del segmento $[a, b]$ tenemos:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=(x-a)\,\varphi'(\xi),$$

donde

$$a<\xi<x.$$

Puesto que $\varphi'(\xi)=0$, entonces:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=0$$

ó

$$\varphi(x)=\varphi(a). \qquad (3)$$

Así, la función $\varphi(x)$, en todo punto x del segmento $[a, b]$ conserva el valor igual a $\varphi(a)$, lo que quiere decir que esta función es constante en el segmento $[a, b]$. Designemos la constante $\varphi(a)$ por C, de las igualdades (2) y (3) obtenemos:

$$F_1(x)-F_2(x)=C.$$

Del teorema demostrado se deduce que si conocemos cualquier función primitiva $F(x)$, de la función $f(x)$ entonces toda otra función primitiva de $f(x)$ tiene la forma $F(x)+C$, donde $C=\text{const}$.

Definición 2. Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x) + C$ se llama *integral indefinida* de la función $f(x)$ y se designa mediante el símbolo $\int f(x)\,dx$. De tal modo, según la definición:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

si

$$F'(x) = f(x).$$

En este caso, $f(x)$ *se llama integrando o función bajo el signo de integral;* $f(x)\,dx$, *elemento de integración o la expresión bajo el signo de integral y el símbolo* $\int$, *signo de integral.*

Así, la integral indefinida representa una familia de funciones $y = F(x) + C$.

El significado geométrico de la integral indefinida es un conjunto (familia) de curvas, cada una de las cuales se obtiene mediante el desplazamiento de una curva paralelamente a sí misma hacia arriba o hacia abajo, es decir, a lo largo del eje Oy.

Naturalmente surge una cuestión: ¿si toda $f(x)$ tiene funciones primitivas (y, por consiguiente, integral indefinida)? La respuesta es negativa. Sin embargo, notemos, por ahora sin demostración, *que toda función* $f(x)$ *continua en el segmento* $[a, b]$ *tiene una función primitiva (y, por tanto, una integral indefinida).*

En el capítulo presente vamos a estudiar los métodos que permiten determinar las funciones primitivas (y por consiguiente las integrales indefinidas) de ciertas clases de funciones elementales.

El proceso que permite hallar la función primitiva de una función $f(x)$ se llama *integración de la función* $f(x)$.

Observemos lo siguiente: mientras que la derivada de una función elemental es siempre una función elemental, la primitiva de una función elemental puede no expresarse mediante un número finito de funciones elementales. Estudiemos más detalladamente este problema al final del presente capítulo.

De la definición 2 se deduce:

1. *La derivada de una integral indefinida es igual al integrando, es decir, si* $F'(x) = f(x)$, *entonces:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x). \qquad (4)$$

Esta última igualdad significa que la derivada de una primitiva cualquiera es igual al integrando.

2. *La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Esto se deduce de la fórmula (4).

3. *La integral indefinida de la diferencial de una cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Es fácil comprobar que esta igualdad es válida mediante la derivación (las diferenciales de ambos miembros de la igualdad son iguales a $dF(x)$).

§ 2. TABLA DE INTEGRALES

Antes de proceder a la exposición de los métodos de integración daremos una tabla de integrales de las funciones elementales.

La tabla de integrales se deduce inmediatamente de la definición 2 § 1, cap. X, y de la tabla de las derivadas (§ 15, cap. III). (Es fácil comprobar que las igualdades de la tabla son válidas median te la derivación, es decir, se puede verificar que la derivada del segundo miembro es igual al integrando).

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$. (Aquí y en las fórmulas siguientes C designa una constante arbitraria).

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$

9. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

10. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11'. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$

13'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Observación. En la tabla de las derivadas (§ 15, cap. III) no hay fórmulas que correspondan a las 7, 8, 11', 12, 13' y 14. Sin embargo, es fácil comprobar que estas fórmulas son válidas mediante la derivación.

En el caso de la fórmula 7 tenemos:

$$(-\ln|\cos x|)' = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

por tanto, $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

En el caso de la fórmula 8 tenemos:

$$(\ln|\operatorname{sen} x|)' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x,$$

por tando, $\int \operatorname{cotg} x = \ln|\operatorname{sen} x| + C$.

En caso de la fórmula 12 tenemos:

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|\right)' = \frac{1}{2a} [\ln|a+x| - \ln|a-x|]' =$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2},$$

por tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Notemos que la última fórmula se deduce también de los resultados generales del § 9, cap. X.

En el caso de la fórmula 14 tenemos:

$$(\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

por tanto

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$$

Esta fórmula también se deduce de los resultados generales del § 11.

De la manera análoga se verifican las fórmulas 11′ y 13′. Observemos que estas fórmulas serán obtenidas en lo ulterior de las fórmulas 11 y 13 (véase § 4, ejemplos 3 y 4).

§ 3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Teorema 1. *La integral indefinida de la suma algebraica de dos o varias funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales*

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Para demostrar el teorema hallemos las derivadas del primero y segundo miembros de esta igualdad (1). En virtud de la igualdad (4) del párrafo anterior hallamos:

$$\left(\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x).$$

Así, la derivada del primer miembro de la igualdad (1) es igual a la derivada del segundo miembro, es decir, la derivada de cualquier función primitiva del primer miembro es igual a la derivada de una función arbitraria del segundo miembro. Por consiguiente, según el teorema § 1 cap. X, toda función del primer miembro de la igualdad (1) se diferencia de toda función del segundo miembro de esta igualdad en un sumando constante. La igualdad (1) tiene precisamente este significado.

Teorema 2. *El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral, es decir, si* $a=$ const, *entonces*:

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Para demostrar la igualdad (2), derivemos ambos miembros:

$$\left(\int af(x)\,dx\right)'=af(x),$$

$$\left(a\int f(x)\,dx\right)'=a\left(\int f(x)\,dx\right)'=af(x).$$

Las derivadas de ambos miembros son iguales, por consiguiente, lo mismo que en la igualdad (1), la diferencia de dos funciones cualesquiera, *dispuestas a la derecha* y *a la izquierda, es una constante.* La igualdad (2) tiene precisamente este significado.

Durante el cálculo de las integrales indefinidas es útil tener en cuenta las reglas siguientes.

I. Si:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \tag{3}$$

En efecto, derivando ambos miembros de la igualdad (3), obtenemos:

$$\left(\int f(ax)\,dx\right)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax))'_x = \frac{1}{a}F'(ax)\,a = F'(ax) = f(ax).$$

Las derivadas de los dos miembros son iguales, lo que se trataba de demostrar:

II. Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\cdot$$

entonces:

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C. \tag{4}$$

III. Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{5}$$

Las igualdades (4) y (5) se demuestran mediante la derivación de sus miembros.

Ejemplo 1.

$$\int (2x^3 - 3\,\mathrm{sen}\,x + 5\sqrt{x})\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\,\mathrm{sen}\,x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\int x^3\,dx - 3\int \mathrm{sen}\,x\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\,\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) +$$

$$+ 5\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Ejemplo 2.

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx=3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx+\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+$$

$$+\int x^{\frac{5}{4}}\,dx=3\,\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+C=$$

$$=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C.$$

Ejemplo 3.

$$\int\frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|+C.$$

Ejemplo 4.

$$\int\cos 7x\,dx=\frac{1}{7}\operatorname{sen}7x+C.$$

Ejemplo 5.

$$\int\operatorname{sen}(2x-6)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-6)+C.$$

§ 4. INTEGRACION POR CAMBIO DE VARIABLE O POR SUSTITUCION

Supongamos que es preciso hallar la integral

$$\int f(x)\,dx,$$

pero, no podemos elegir inmediatamente la función primitiva para $f(x)$, aunque sabemos que ésta existe.

Realicemos el cambio de variable en el elemento de integración, haciendo

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

donde, $\varphi(t)$ es una función continua, lo mismo que su derivada, y tiene una función inversa. Entonces $dx=\varphi'(t)\,dt$; demostremos que en este caso se verifica la siguiente igualdad:

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Aquí se sobreentiende que la variable t será sustituida después de la integración del segundo miembro de la igualdad, por su expresión en función de x, en virtud de la igualdad (1).

Para determinar que las expresiones en los dos miembros son iguales, en el sentido indicado, es preciso demostrar que sus derivadas respecto a x son iguales. Hallemos la derivada del primer miembro:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x=f(x).$$

Derivemos el segundo miembro de la igualdad (2), respecto a x, como función compuesta en la que t es un argumento intermedio. La igualdad (1) expresa la dependencia que tiene t de x, siendo $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$; según la regla de derivación de una función inversa:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

De tal manera tenemos:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Por consiguiente, las derivadas respecto a x de los dos miembros de la igualdad (2) son iguales, lo que se trataba de demostrar.

Hay *que elegir la función* $x = \varphi(t)$ *de modo que se pueda calcular la integral indefinida que figura en el segundo miembro de la igualdad* (2).

Observación. A veces es preferible elegir la sustitución de la variable en la forma $t = \psi(x)$ y no en $x = \varphi(t)$.

Ilustrémoslo con un ejemplo. Supongamos que es preciso calcular la integral

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)}.$$

Es conveniente poner:

$$\psi(x) = t,$$

entonces:

$$\psi'(x)\,dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Demos algunos ejemplos de integración por cambio de variables.

Ejemplo 1. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = ?$ Hagamos la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, entonces: $dt = \cos x\,dx$, y, por tanto,

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x + C.$$

Ejemplo 2. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}=?$ Sea $t=1+x^2$, entonces $dt=2x\,dx$, y,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Ejemplo 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Sea $t=\frac{x}{a}$, entonces: $dx=a\,dt$,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Ejemplo 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Sea $t=\frac{x}{a}$; entonces: $dx=a\,dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\operatorname{arcsen} t+C=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$$

(se supone que $a>0$).

En los ejemplos 3 y 4 hemos obtenido las fórmulas 11′ y 13′ de la tabla de integrales (véase § 2).

Ejemplo 5. $\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}=?$. Sea $t=\ln x$; entonces $dt=\frac{dx}{x}$, $\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}=$

$$=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C.$$

Ejemplo 6. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}=?$. Sea $t=x^2$; entonces $dt=2x\,dx$,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C.$$

La integración por sustitución de variables es uno de los métodos más importantes del cálculo de las integrales indefinidas. Incluso cuando utilizamos algún otro método frecuentemente, estamos obligados a recurrir en las operaciones intermedias al método de sustitución de variables. El éxito de la integración depende en grado considerable de la habilidad para elegir la sustitución adecuada de variables. Esto simplifica la integral dada. Por eso, el estudio de los métodos de integración se reduce, en su esencia, a la determinación de la conveniente sustitución de variables para uno u otro elemento de integración. Al estudio de los métodos mencionados se dedica la mayor parte del capítulo presente.

§ 5. INTEGRALES DE CIERTAS FUNCIONES QUE CONTIENEN UN TRINOMIO CUADRADO

1. Calcular la integral

$$I_1=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Transformemos, previamente, en forma de una suma o una diferencia de los cuadrados el trinomio en el denominador,

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],$$

donde está designado:

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2.$$

El signo «más» o «menos» se toma según sea positiva o negativa la expresión del primer miembro, es decir, según sean complejas o reales las raíces del trinomio ax^2+bx+c. De este modo, la integral I_1 toma la forma:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

Cambiemos la variable en la última integral:

$$x+\frac{b}{2a}=t,\quad dx=dt.$$

Obtenemos

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Estas son las integrales 11′ y 12 de la tabla.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

Solución.

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

Sustituimos la variable $x+2=t$, $dx=dt$, y, poniéndola en la expresión en

consideración, obtenemos la integral de la tabla:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Sustituyendo t por su expresión en función de x; en definitiva obtenemos:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. Calcular una integral de la forma más general

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Transformemos el integrando en la forma siguiente:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Respresentemos la última integral en forma de una suma de dos integrales. Sacando los factores constantes fuera del signo de la integral, obtenemos:

$$I_1=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

La última es la integral I_1, que ya sabemos calcular. En la integral primera realicemos el cambio de variable:

$$ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)\,dx=dt.$$

Por consiguiente,

$$\int\frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|ax^2+bx+c|C.$$

En definitiva obtenemos:

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx.$$

Apliquemos el procedimiento mencionado:

$$I=\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-5}+4\int \frac{dx}{x^2-2x-5}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+$$

$$+4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+4\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C.$$

III. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Utilizando las transformaciones estudiadas en el punto I, se puede reducir la integral (según sea el signo de a) a una de las integrales de la tabla:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}} \text{ para } a>0 \text{ ó } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} \text{ para } a<0,$$

Estos dos integrales figuran en la tabla (véase las fórmulas 13' y 14).

IV. La integral

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

se calcula con ayuda de las siguientes transformaciones análogas a las estudiadas en el punto II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Realizando en la primera integral la sustitución

$$ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)\,dx=dt,$$

obtenemos:

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

La segunda integral ha sido examinada en el punto III del párrafo presente.

Ejemplo 3.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx=$$
$$=\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$
$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}|+C=$$
$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}|+C.$$

§ 6. INTEGRACION POR PARTES

Si u y v son dos funciones derivables de x, entonces como sabemos, la diferencial del producto uv es:

$$d(uv)=u\,dv+v\,du.$$

De aquí, integrando, obtenemos:

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

ó

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \tag{1}$$

Esta es *la fórmula de integración por partes*. Esta fórmula se usa frecuentemente para integrar las expresiones que pueden ser representadas en forma de un producto de dos factores, u y dv, de tal manera que la búsqueda de la función v, a partir de su diferencial dv, y el cálculo de la integral $\int v\,du$, constituyan en conjunto un problema más simple que el cálculo directo de la integral $\int u\,dv$.

Para descomponer el elemento de integración dado en dos factores u y dv se necesita cierta experiencia que se adquiere resolviendo problemas. Demos algunos ejemplos para demostrar el procedimiento en casos semejantes.

Ejemplo 1. $\int x \operatorname{sen} x\,dx=?$ Sea:

$$u=x,\quad dv=\operatorname{sen} x\,dx$$

entonces,

$$du=dx,\quad v=-\cos x.$$

Por consiguiente, $\int x\operatorname{sen} x\,dx=-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\operatorname{sen} x+C.$

Observación. Cuando determinamos la función v a partir de su diferencial dv, se puede tomar cualquiera constante arbitraria, puesto que ésta no figura en el resultado final (lo que es fácil verificar sustituyendo v en la igualdad (1) por la expresión $v+C$). Por eso es preferible elegir esta constante igual a cero.

El método de integración por partes se utiliza en muchos casos. Así, por ejemplo, las integrales del tipo

$$\int x^k \operatorname{sen} ax\,dx \qquad \int x^k \cos ax\,dx,$$

$$\int x^k e^{ax}\,dx, \qquad \int x^k \ln x\,dx,$$

como también otras que contienen funciones trigonométricas inversas, se calculan, usando la integración por partes.

Ejemplo 2. Hallar: $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. Sea $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$, entonces: $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=x$.

Por consiguiente,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C.$$

Ejemplo 3. Hallar: $\int x^2e^x\,dx$. Sea $u=x^2$, $dv=e^x\,dx$, entonces:

$$du=2x\,dx,\ v=e^x$$

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx.$$

Integrando por partes la última integral,

$$u_1=x, \qquad du_1=dx,$$

$$dv_1=e^x\,dx, \qquad v_1=e^x.$$

Entonces:

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C.$$

En definitiva tenemos:

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

Ejemplo 4. Calcular: $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx$. Haciendo $u=x^2+7x-5$; $dv=\cos 2x\,dx$; entonces:

$$du=(2x+7)\,dx,\ v=\frac{\operatorname{sen} 2x}{2},$$

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx=(x^2+7x-5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\int (2x+7)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\,dx.$$

Apliquemos el método de integración por partes a la última integral, teniendo en cuenta que $u_1=\frac{2x+7}{2}$, $dv_1=\operatorname{sen} 2x\,dx$; entonces:

$$du_1=dx,\ v_1=-\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2}\operatorname{sen} 2x\,dx=\frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)-\int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=$$

$$=-\frac{(2x+7)\cos 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C.$$

De donde finalmente obtenemos:

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx=(x^2+7x-5)\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C.$$

Ejemplo 5. $I=\int \sqrt{a^2-x^2}dx=?$

Efectuemos las transformaciones idénticas. Multipliquemos y dividamos el integrando por $\sqrt{a^2-x^2}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=a^2\operatorname{arsen}\frac{x}{a}-\int x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Apliquemos a esta integral el método de integración por partes, poniendo

$$u=x,\qquad du=dx,$$

$$dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad v=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Sustituyendo el último resultado en la expresión de la integral dada obtenida antes, tenemos:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Traslademos la integral de la derecha a la izquierda, y llevando a cabo las transformaciones elementales, obtenemos en definitiva:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Ejemplo 6. Hallar las integrales

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx\quad\text{y}\quad I_2=\int e^{ax}\operatorname{sen}bx\,dx.$$

Aplicando el método de integración por partes a la primera integral, obtenemos:

$$u=e^{ax},\qquad du=ae^{ax},$$

$$dv=\cos bx\,dx,\quad v=\frac{1}{b}\operatorname{sen}bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen}bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen}bx\,dx.$$

Apliquemos de nuevo a la última integral el método de integración por partes:

$$u=e^{ax},\qquad du=ae^{ax},$$

$$dv=\operatorname{sen}bx\,dx,\quad v=-\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Introduciendo la expresión obtenida en la igualdad anterior, obtenemos:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

De la última igualdad hallemos I_1:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx=e^{ax}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx+\frac{a}{b^2}\cos bx\right),$$

de donde

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

Del modo análogo hallamos:

$$I_2=\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

§ 7. FRACCIONES RACIONALES. FRACCIONES RACIONALES ELEMENTALES Y SU INTEGRACION

Como veremos más abajo, no toda integral de una función elemental se resuelve mediante las funciones elementales. Por eso tiene gran importancia la definición de ciertas clases de funciones, cuyas integrales pueden ser expresadas mediante las funciones elementales. La más simple de estas clases es la clase de las funciones racionales.

Toda función racional puede ser representada en la forma de *una fracción racional, es decir, como la razón de dos polinomios:*

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}.$$

Sin limitar la generalidad del razonamiento, supongamos que estos polinomios no tienen raíces comunes.

Si el grado del numerador es inferior al del denominador, la fracción se llama *propia*; en el caso contrario, la fracción se llamará *impropia*.

Si la fracción es impropia, al dividir el numerador por el denominador (según la regla de división de los polinomios) se puede representar la fracción dada como la suma de un polinomio y de una fracción propia:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

donde, $M(x)$ es un polinomio, y $\frac{F(x)}{f(x)}$ es una fracción propia.

Ejemplo 1. Sea $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ una fracción racional impropia.

Al dividir el numerador por el denominador (según la regla de división de los polinomios), obtenemos:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}.$$

La integración de los polinomios no ofrece dificultades. Por eso, la dificultad fundamental de la integración de fracciones racionales consiste en la integración de las fracciones racionales propias.

Definición: Las fracciones racionales propias del tipo:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{x-a^k}$ (k es un número entero positivo $\geqslant 2$).

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(\text{las raíces del denominador son complejas, es decir, } \frac{p^2}{4}-q<0\right)$,

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k es un número entero positivo $\geqslant 2$, las raíces del denominador son complejas).

se llaman *fracciones simples del tipo I, II, III, IV*, respectivamente.

En el § 8 demostraremos que cada fracción racional puede ser representada en forma de una suma de fracciones simples. Por eso, estudiemos al principio las integrales de las fracciones simples.

La integración de las fracciones simples del tipo I, II, III no ofrece grandes dificultades, por eso efectuaremos su integración sin dar explicaciones detalladas.

I. $$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\int(x-a)^{-k}\,dx=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

III. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C \text{ (véase § 5).}$$

La integración de las fracciones simples del tipo IV requiere cálculos más complicados. Supongamos que debemos calcular una integral de este tipo.

IV. $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$

Hagamos las transformaciones:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

La primera integral se halla por sustitución $x^2+px+q=t$; $(2x+p)\,dx=dt$:

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int\frac{dt}{t^k}=\int t^{-k}\,dt=\frac{t^{-k+1}}{1-k}+C=$$

$$=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Escribamos la segunda integral designada por I_k, en la forma:

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

haciendo

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad dx=dt, \quad q-\frac{p^2}{4}=m^2.$$

(según la hipótesis, las raíces del denominador son complejas y, por tanto, $q-\frac{p^2}{4}>0$). Ahora procedamos del modo siguiente:

$$I_k=\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt=$$

$$=\frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt.$$

Transformemos la última integral:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\int \frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{2}\int t\,\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Integrando por partes, tenemos:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\,\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Sustituyendo esta expresión en la igualdad (1), obtenemos:

$$I_k=\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+$$

$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

En el segundo miembro se encuentra la integral del mismo tipo que I_k, siendo el exponente del grado del denominador del integrando menor en una unidad $(k-1)$; así resulta que hemos expresado I_k en función de I_{k-1}.

Aplicando sucesivamente este procedimiento obtenemos la integral conocida:

$$I_1=\int \frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

Sustituyendo ahora t y m por sus valores, obtenemos la expresión de la integral IV, en función de x y números dados A, B, p, q.

Ejemplo 2.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Apliquemos a la última integral la sustitución $x+1=t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}.$$

Examinemos la última integral:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

aquí todavía no ponemos una constante arbitraria, la escribiremos en el resultado final).

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

En definitiva tenemos:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 8. DESCOMPOSICION DE LA FRACCION RACIONAL EN FRACCIONES SIMPLES

Demostremos ahora que toda fracción racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones simples.

Sea $\frac{F(x)}{f(x)}$ una fracción racional propia.

Supongamos que los coeficientes de los polinomios que la integran son números reales y la fracción dada es irreducible (lo último significa que el numerador y el denominador no tienen raíces comunes).

Teorema 1. *Sea $x = a$ una raíz múltiple de orden k del denominador, es decir,* $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, *donde* $f_1(a) \neq 0$ (véase § 6, cap. VII). *Entonces la fracción propia dada* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *se puede descomponer en la suma de dos fracciones propias:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{1}$$

donde A es una constante, diferente de cero, y $F_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al grado del denominador $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Demostración. Escribamos la identidad

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{2}$$

(que se verifica para cualquier A) y definamos la constante A de modo que el polinomio $F(x) - Af_1(x)$ sea divisible por $x - a$. En virtud del teorema de Bezout, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad

$$F(a) - Af_1(a) = 0.$$

Puesto que $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, se puede definir A de una manera unívoca por la igualdad

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Para tal A tenemos:

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

donde $F_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al del polinomio $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Reduciendo la fracción en la fórmula (2) por $(x-a)$, obtenemos la igualdad (1).

Corolario. A la fracción racional propia

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

que entra en la igualdad (1), se pueden aplicar razonamientos análogos. Así, si el denominador tiene una raíz múltiple $x = a$ de orden k, se puede escribir:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

donde $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ es una fracción propia irreducible a la cual se puede aplicar el teorema recién demostrado, si $f_1(x)$ tiene otras raíces reales.

Estudiemos ahora el caso en que el denominador tiene raíces complejas. Recordemos que las raíces complejas del polinomio de coeficientes reales están conjugadas en pares (véase § 8 cap. VII).

En la descomposición del polinomio en factores reales, a cada par de raíces conjugadas corresponde una expresión de la forma $x^2 + px + q$. Si las raíces conjugadas son múltiples de orden μ la expresión correspondiente será $(x^2 + px + q)^\mu$.

Teorema 2. *Si* $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$, *donde el polinomio* $\varphi_1(x)$ *no es divisible por* $x^2 + px + q$, *la fracción racional propia* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *puede ser representada por la suma de dos fracciones propias:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}\varphi_1(x)} \tag{3}$$

donde $\Phi_1(x)$ *es un polinomio de grado inferior al del polinomio* $(x^2 + px + q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Demostración: Escribamos la identidad

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \\ + \frac{F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)}, \tag{4}$$

que se verifica para todo M y N y definamos M y N de modo que el polinomio $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ se divida por $x^2 + px + q$. Para esto es necesario y suficiente que la ecuación

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$$

tenga las mismas raíces $\alpha \pm i\beta$ que el polinomio $x^2 + px + q$.

Por tanto,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ó

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Pero, $\frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}$ es un número complejo determinado que se puede escribir en la forma $K + iL$; donde K y L son números reales. Así,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

de donde $M\alpha + N = K$, $M\beta = L$
ó

$$M = \frac{L}{\beta}, \qquad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

Siendo estos los valores de los coeficientes M y N, el polinomio $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ tiene el número $\alpha + i\beta$ por raíz, y, por tanto, la raíz conjugada $\alpha - i\beta$. Pero, en este caso, el polinomio es divisible sin resto por las diferencias $x - (\alpha + i\beta)$ y $x - (\alpha - i\beta)$, y, lógicamente, por su producto, es decir, por $x^2 + px + q$.

Designando el cociente de esta división por $\Phi_1(x)$, obtenemos:

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\Phi_1(x).$$

Simplificando por $x^2 + px + q$ la última fracción en la igualdad (4), obtenemos la igualdad (3), quedándose claro que $\Phi_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al del denominador, lo que se trataba de demostrar.

Aplicando los resultados de los teoremas 1 y 2 a la fracción propia $\frac{F(x)}{f(x)}$, podemos destacar sucesivamente todas las fracciones simples, correspondientes a todas las raíces del denominador $f(x)$. Así, de lo anterior se deduce el siguiente resultado:

Si $f(x) = (x - a)^{\alpha}(x - b)^{\beta} \ldots (x^2 + px + q)^{\mu} \ldots (x^2 + lx + s)^{\nu}$, *la fracción* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *puede ser descompuesta de la manera siguiente:*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
&\quad + \frac{B}{(x-b^{\beta})} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Se puede determinar los coeficientes $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ teniendo en cuenta las consideraciones siguientes. La igualdad (5) es una identidad, por consiguiente, al reducir estas fracciones a un común denominador obtenemos en los numeradores del primero y segundo miembros polinomios idénticos. Igualando los coeficien-

tes de los términos que tienen las mismas potencias de x, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes incógnitos $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$

También podemos determinar estos coeficientes, teniendo en cuenta la observación siguiente: los polinomios obtenidos en ambos miembros de la igualdad, después de la reducción de las fracciones al común denominador, deben ser idénticamente iguales; por consiguiente, los valores de estos polinomios son iguales para cada valor particular de x. Dando a x valores particulares, obtenemos las ecuaciones necesarias para la determinación de los coeficientes.

De este modo demostramos que toda fracción racional propia puede ser representada en la forma de una suma de las fracciones racionales simples.

Ejemplo. Descomponer la fracción $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ en fracciones simples.
En virtud de la fórmula (5) tenemos:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Reduciendo a un común denominador e igualando los numeradores obtenemos:

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3, \quad (6)$$

ó

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+$$
$$+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Igualando los coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0 (término absoluto), obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$0=A_2+B,$$
$$1=A_1+3B,$$
$$0=A-A_1-3A_2+3B,$$
$$2=-2A-2A_1-2A_2+B.$$

Resolviendo este sistema, tenemos:

$$A=-1;\quad A_1=\frac{1}{3};\quad A_2=-\frac{2}{9};\quad B=\frac{2}{9}.$$

Se puede, también, determinar algunos coeficientes a partir de las ecuaciones que se obtienen de la igualdad (6), que es identidad respecto a x, cuando a la variable x se dan ciertos valores particulares.

Pues, haciendo $x=-1$, tenemos $3=-3A$ ó $A=-1$;

haciendo $x=2$, tenemos $6=27B$; $B=\frac{2}{9}$.

Si adjuntamos a estas dos ecuaciones otras dos obtenidas mediante la igualación de los coeficientes de las mismas potencias de x, obtenemos cuatro ecuaciones para determinar cuatro coeficientes desconocidos.

En definitiva, tenemos una descomposición:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. INTEGRACION DE LAS FRACCIONES RACIONALES

Supongamos que hace falta calcular la integral de la fracción racional $\frac{Q(x)}{f(x)}$, es decir, la integral

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\, dx.$$

Si la fracción dada es **impropia**, la representamos como suma de un polinomio $M(x)$ y una fracción racional **propia** $\frac{F(x)}{f(x)}$ (véase 7). Pero fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ la representamos en la forma de una suma de fracciones **simples** (según la fórmula (5) § 8). De tal modo, la integración de toda la fracción racional consiste fundamentalmente en la integración de un polinomio y de varias fracciones **simples**. De los resultados obtenidos en el § 8 se deduce que las raíces del denominador $f(x)$ determinan la forma de las fracciones simples. Son posibles los siguientes casos:

Caso I. *Las raíces del denominador son reales y diferentes, es decir,*

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en las fracciones simples del tipo I:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d},$$

y luego

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{A}{x-a}\, dx + \int \frac{B}{x-b}\, dx + \ldots + \int \frac{D}{x-d}\, dx =$$

$$= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \ldots + D \ln|x-d| + C.$$

Caso II. *Las raíces del denominador son reales; pero, algunas raíces son múltiples:*

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en fracciones simples del tipo I y II.

Ejemplo 1. (véase el ejemplo en el § 8 cap. X).

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} +$$

$$+\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| +$$

$$+\frac{2}{9}\ln|x-2| + C = -\frac{2x-1}{-6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

Caso III. *El denominador tiene raíces complejas simples,* es decir, *diferentes:*

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+lx+s)\ \ldots\ (x-a)^{\alpha}\ \ldots\ (x-d)^{\delta}.$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en fracciones simples de los tipos I, II y III.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Descomponemos la fracción bajo el signo de integral en fracciones simples (véase (5) § 8, cap. X):

$$\frac{x}{(x_2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Por consiguiente,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Haciendo $x=1$, tenemos: $1=2C$, $C=\frac{1}{2}$.

Haciendo $x=0$, tenemos: $0=-B+\mathrm{C}$, $B=\frac{1}{2}$.

Igualando los coeficientes de x^2, obtenemos $0=A+C$, de donde $A=-\frac{1}{2}$.

Así,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

Caso IV. El *denominador contiene también raíces complejas múltiples*:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^{\mu} (x^2 + lx + s)^{\nu} \ldots (x-a)^{\alpha} \ldots (x-d)^{\delta}.$$

En este caso las fracciones simples del tipo IV entran también en la descomposición de la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx.$$

Solución. Descompongamos la fracción en elementos simples:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)} + \frac{E}{x+1},$$

de donde

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 =$$
$$= (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1) + E(x^2+2x+3)^2.$$

Combinando los dos métodos dados para determinar los coeficientes, hallamos:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 1.$$

De tal modo tenemos:

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C$$

En el ejemplo 2, § 7, cap. X hemos calculado la primera integral del segundo miembro. La segunda integral puede ser calculada directamente.

Del estudio realizado se deduce que la integral de cualquier función racional puede ser expresada mediante funciones elementales finitas, es decir:

1) mediante los logaritmos, si las fracciones simples son del tipo I;

2) mediante las funciones racionales, si las fracciones simples son del tipo II;

3) mediante los logaritmos y arcos tangentes, si las fracciones simples son del tipo III;

4) mediante las funciones racionales y arcos tangentes, si las fracciones simples son del tipo IV.

§ 10. METODO DE OSTROGRADSKI

Para calcular la integral de una función racional, cuando el denominador tiene las raíces **múltiples**, se puede utilizar otro método más simple. Este método permite destacar la **parte racional** de la integral, sin descomponer la fracción en los elementos simples e integrar después la fracción racional, cuyo denominador tiene solamente raíces **simples**. La integración de tal fracción no ofrece ninguna dificultad, puesto que puede ser descompuesta en fracciones simples de los tipos I y III. Este método se debe al célebre matemático ruso M. V. Ostrogradski (1801—1862) y se basa en lo siguiente.

Supongamos que se necesita integrar una fracción racional propia $\frac{F(x)}{f(x)}$, donde

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ \ldots\ (x^2+px+q)^{\mu}.$$

En virtud de la igualdad (5) (§ 8) el caso se reduce a la integración de las fracciones racionales propias de cuatro tipos (véase § 7). En este caso:

1) La integral de la fracción del tipo $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ es una fracción del tipo $\frac{A^*}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

2) La integral de la fracción $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}$ es una suma de fracciones del tipo $\frac{M^*x+N^*}{(x^2+px+q)^{\mu^*}}$, donde $\mu^*\leqslant\mu-1$, y de una integral del tipo

$$\int\frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx.$$

Por ahora dejemos aparte la integración de las fracciones de los tipos I y III.

Al sumar las fracciones racionales obtenidas después de la integración de las fracciones del tipo II y IV, tenemos la fracción propia

del tipo $\frac{Y(x)}{Q(x)}$, en la que el polinomio $Q(x)$ es igual a

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \dots (x^2+px+q)^{\mu-1} \dots$$
$$\dots (x^2+lx+s)^{\nu-1}.$$

$Y(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor, en una unidad, que el del polinomio Q.

Al sumar las integrales de todas las fracciones del tipo I y III, (incluyendo también las integrales del tipo

$$\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx,$$

obtenidas mediante la integración de las fracciones del tipo IV) obtenemos la integral de la fracción propia del tipo $\frac{X(x)}{P(x)}$, donde el polinomio $P(x)$ es igual a

$$P(x) = (x-a)(x-b)\dots(x^2+px+q)\dots(x^2+lx+s).$$

Así, encontremos que

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)}\,dx. \tag{1}$$

Aquí, $X(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor en una unidad que el del polinomio $P(x)$.

Determinemos ahora los polinomios $X(x)$ y $Y(x)$ de los numeradores. Para esto derivemos ambos miembros de la igualdad (1):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{QY' - Q'Y}{Q^2} + \frac{X}{P}$$

ó

$$F(x) = \frac{f(x)\,Y'}{Q} - \frac{f(x)\,Q'Y}{Q^2} + \frac{f(x)\,X}{P}. \tag{2}$$

Demostremos que la expresión del segundo miembro es un polinomio. Notemos que $f(x) = PQ$ y escribamos la igualdad (2) en la forma:

$$F(x) = PY' - \frac{PQ'Y}{Q} + QX. \tag{2'}$$

Queda demostrar que la expresión $-\frac{PQ'Y}{Q}$ es un polinomio, o que PQ' es divisible por Q. Para esto observemos que

$$\frac{Q'}{Q}=[\ln Q]'=[(\alpha-1)\ln(x-a)+(\beta-1)\ln(x-b)+\ \dots$$

$$\dots+(\mu-1)\ln(x^2+px+q)+\ \dots\ +(\nu-1)\ln(x^2+lx+s)]'=$$

$$=\frac{\alpha-1}{x-a}+\frac{\beta-1}{x-b}+\ \dots\ +\frac{(\mu-1)(2x+p)}{x^2+px+q}+\ \dots$$

$$\dots+\frac{(\nu-1)(2x+l)}{x^2+lx+s}.$$

El polinomio P será el denominador común de las fracciones del segundo miembro. El numerador será un polinomio del grado inferior al del de P. Designémoslo por T. De tal modo,

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{T}{P}.$$

Por consiguiente, la expresión

$$P\frac{Q'}{Q}Y=P\frac{T}{P}Y=TY$$

es un polinomio. La igualdad (2') tomará la forma:

$$F(x)=PY'-TY+QX. \tag{3}$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de la variable en la igualdad (3), obtenemos el sistema de ecuaciones, de donde encontramos los coeficientes desconocidos de los polinomios X y Y.

Ejemplo. Calcular

$$\int\frac{1}{(x^3-1)^2}\,dx.$$

Solución. *En este caso:*

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+x+1)^2,$$
$$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1,$$
$$Q(x)=\qquad\qquad\qquad=x^3-1.$$

La igualdad (1) tiene la forma:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}\,dx. \tag{4}$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (4) tenemos:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+c)\,3x^2}{(x^3-1)^2}+\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}.$$

Eliminando el denominador, obtenemos:

$$1=(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)\,3x^2+(x^3-1)(Ex^2+Fx+G).$$

Igualando los coeficientes de los términos con las mismas potencias de x en ambos miembros de la igualdad, obtenemos un sistema de seis ecuaciones para determinar los coeficientes A, B, C, E, F, G:

$$0=E,$$
$$0=-A+F,$$
$$0=-2B+G,$$
$$0=3C-E,$$
$$0=-2A-F,$$
$$1=-B-G.$$

La solución de este sistema nos da:

$$E=0,\ A=0,\ C=0,\ B=-\frac{1}{3},\ F=0,\ G=-\frac{2}{3}.$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes determinados en la igualdad (4), obtenemos:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}\,dx.$$

El denominador de la última integral tiene sólo raíces simples y, por eso, la integral se calcula fácilmente. En definitiva:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-x}{3(x^3-1)}+\int\left[\frac{-\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}\right]dx=$$
$$=-\frac{x}{3(x^2-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 11. INTEGRALES DE LAS FUNCIONES IRRACIONALES

No siempre es posible expresar la integral de función irracional mediante funciones elementales. En este párrafo y en los posteriores estudiaremos funciones irracionales, cuyas integrales se reducen, mediante sustituciones de las variables correspondientes, a las integrales de funciones racionales y se integran, por tanto, totalmente.

1. Examinemos la integral $\int R\left(x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, donde R es una función racional de sus argumentos*.

---

*) El símbolo $R\left(x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ x^{\frac{r}{s}}\right)$ indica que con las magnitudes x, $x^{\frac{m}{n}}$, ..., $x^{\frac{r}{s}}$ se ejecutan sólo operaciones racionales.

Del mismo modo hay que entender en lo ulterior los símbolos del tipo $R\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ \ldots\right)$, $R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})$, $R(\operatorname{sen}x,\ \cos x)$, etc. Así por ejemplo, el símbolo $R(\operatorname{sen}x,\ \cos x)$ indica que con $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ se realizan operaciones racionales.

Sea k el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Ejecutemos la sustitución:

$$x = t^k, \qquad dx = kt^{k-1}\,dt.$$

Entonces, cada potencia **fraccionaria** de x se puede expresar *mediante una potencia* **entera** *de t y, por consiguiente, el integrando* se transformará en **función racional** de t.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Solución. El común denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ es 4. Por eso, efectuemos la sustitución $x = t^4$, $dx = 4t^3\,dt$; entonces:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = 4\,\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C.$$

II. Examinemos la integral del tipo

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx.$$

La integral se reduce a la de una función racional por medio de la sustitución

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

donde, k es un denominador común de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx.$$

Solución. Efectuemos la sustitución

$$x+4 = t^2;\quad x = t^2 - 4;$$

$dx = 2t\,dt$; entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt = 2\int \left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

§ 12. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Examinemos la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \tag{1}$$

Esta integral se reduce a la de una función racional de la nueva variable mediante las siguientes sustituciones de Euler.

1. *Primera sustitución de Euler.* Si $a > 0$, hacemos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t.$$

Para mayor precisión, tomemos el signo más delante de $\sqrt{a}$. Entonces,

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,xt + t^2,$$

de donde x se define como una función racional de t:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$$

(lo que quiere decir que dx también es una función racional de t), por consiguiente:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t = \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t$$

es decir, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es función racional de t.

Puesto que $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x y dx se expresan mediante funciones racionales de t, por tanto, la integral dada (1) se transforma en la integral de una función racional de t.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}}.$$

Solución. Puesto que aquí $a = 1 > 0$, pongamos $\sqrt{x^2+C} = -x + t$; entonces:

$$x^2 + C = x^2 - 2xt + t^2,$$

de donde

$$x = \frac{t^2-C}{2t}.$$

Por consiguiente,

$$dx = \frac{t^2+C}{2t^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2+C} = -x+t = -\frac{t^2-C}{2t}+t = \frac{t^2+C}{2t}.$$

Retornando a la integral inicial, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} = \int \frac{\frac{t^2+C}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+C}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C_1 = \ln|x+\sqrt{x^2+C}|+C_1$$

(véase la fórmula 14 de la tabla de integrales).

2. *Segunda sustitución de Euler.* Si $c > 0$, pongamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$$

entonces:

$$ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c.$$

(Para mayor precisión hemos tomado el signo más delante de la raíz). De aquí x se define como función racional de t:

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}.$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ también se expresan mediante funciones racionales de t, entonces sustituyendo los valores de x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ y dx en la integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, reducimos esta última a la integral de una función racional de t.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Solución. Pongamos $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$, entonces,

$$1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1;\quad x = \frac{2t-1}{1-t^2};\ dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2};\ 1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la integral inicial, encontramos:

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}\,dx =$$

$$= +2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt+C = -2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{2(\overline{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1| + C.$$

3. *Tercera sustitución de Euler.* Supongamos que α y β son raíces reales del trinomio ax^2+bx+c. Pongamos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t.$$

Siendo $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, tenemos:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\,t,$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 t^2,$$

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)\,t^2.$$

De donde x se expresa como una función racional de t:

$$x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ son también funciones racionales de t, la integral dada se transforma en la integral de la función racional de t.

Observación 1. La tercera sustitución de Euler es aplicable no sólo cuando $a<0$, sino también cuando $a>0$; la única condición es que el polinomio ax^2+bx+c tenga dos raíces reales.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Solución. Puesto que $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, pongamos:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)\,t.$$

Entonces: $(x+4)(x-1)=(x+4)^2t^2$, $x-1=(x+4)t^2$,

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}, \qquad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = \left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t = \frac{5t}{1-t^2}.$$

Retornando a la integral inicial, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{10t\,(1-t^2)}{(1-t^2)^2\,5t}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + C.$$

Observación 2. Notemos que para reducir la integral (1) a la integral de una función racional es suficiente utilizar la primera y la tercera sustituciones de Euler. Examinemos el trinomio $ax^2 + bx + c$. Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces del trinomio son reales y, por tanto, es aplicable la tercera sustitución de Euler. Si $b^2 - 4ac \leqslant \leqslant 0$, tenemos

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

y, por tanto, el trinomio tiene el mismo signo que a. Para que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sea real, hace falta que el trinomio sea positivo y, *partiendo de aquí, tiene que ser $a > 0$. En este caso se puede usar* la primera sustitución.

§ 13. INTEGRACION DE LOS BINOMIOS DIFERENCIALES

La expresión de la forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

en la que m, n, p, a, b son números constantes se llama *binomio diferencial*.

Teorema. La *integral del binomio diferencial*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

puede reducirse, si m, n, p, son números racionales, a la integral de una función racional y, por consiguiente, puede expresarse mediante funciones elementales en los tres casos siguientes:

1) p es *un número entero* (positivo, negativo o cero);

2) $\frac{m+1}{n}$ *es un número entero* (positivo, negativo o cero);

3) $\frac{m+1}{n} + p$ *es un número entero* (positivo, negativo o cero).

Demostración. Transformemos la integral dada con ayuda de la sustitución

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz .$$

Entonces:

$$\int x^m(a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p \, dz = \frac{1}{n}\int z^q (a + bz)^p \, dz, \quad (1)$$

donde

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

1. Sea p un número entero. Siendo q un número racional, designémoslo por $\frac{r}{s}$. En este caso, la integral (1), tiene la forma:

$$\int R\left(z^{\frac{r}{s}}, z\right) dz.$$

Hemos indicado en el § 11, cap. X, que una integral de este tipo puede reducirse a una función racional mediante la sustitución $z = t^s$.

2. Sea $\frac{m+1}{n}$ un número entero. Entonces $q = \frac{m+1}{n} - 1$ es también un número entero. El número p es racional, $p = \frac{\lambda}{\mu}$.

La integral (1) se reduce entonces, a una integral del tipo

$$\int R\left[z^q, (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}\right] dz.$$

Esta integral fue estudiada en el § 11, cap. X. Se puede reducirla a la integral de una función racional con ayuda de la sustitución

$$a + bz = t^{\mu}.$$

3. Sea $\frac{m+1}{n} + p$ un número entero. Pero, entonces, $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ también es un número entero. Transformemos la integral (1):

$$\int z^q (a+bz)^p \, dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz,$$

donde $q+p$ es un número entero y $p = \frac{k}{l}$ es un número racional. La última integral pertenece al grupo de integrales

$$\int R\left[z, \left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\frac{k}{l}}\right] dz,$$

Esta integral fue examinada en el § 11, cap. X. La integral indicada se reduce a la integral de una función racional mediante la sustitución $\frac{a+bz}{z} = t^l$.

Examinemos los ejemplos de la integración en todos los tres casos.

Ejemplo 1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}=\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx$. Aquí, $p=-1$ (número entero). Pongamos $x^{\frac{2}{3}}=z$, transformemos la igualdad hasta obtener entre paréntesis la expresión lineal respecto a z:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx=\int z^{-1}(1+z)^{-1}\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}\,dz=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz.$$

Hagamos la sustitución:

$$z^{\frac{1}{2}}=t.$$

Entonces, $z=t^2$, $dz=2t\,dt$, y

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz=\frac{3}{2}\int t^{-1}(1+t^2)^{-1}\,2t\,dt=$$

$$=3\int \frac{dt}{1+t^2}=3\operatorname{arctg} t+C=3\operatorname{arctg}\sqrt{z}+C=3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}+C.$$

Ejemplo 2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$. Aquí, $m=3$; $n=2$; $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$ (número entero). Realicemos la sustitución $x^2=z$. Entonces, $x=z^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz$, y

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int z^{\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Para transformar la expresión entre segundos paréntesis en racional, pongamos $(1-z)^{\frac{1}{2}}=t$; entonces: $1-z=t^2$; $z=t^2-1$; $dz=2t\,dt$.
Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz=\frac{1}{2}\int (t^2-1)\,t^{-1}2t\,dt=\int (t^2-1)\,dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{t}{3}(t^2-3)+C=\frac{\sqrt{1-z}}{3}(-z-2)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2)+C.$$

Ejemplo 3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$. Aquí, $m=-2$, $n-2$, $p=-\frac{3}{2}$, y $\frac{m+1}{n}+p=-2$ (número entero).

Transformemos la expresión entre paréntesis en función lineal:

$$x^2 = z; \quad x = z^{\frac{1}{2}}; \quad dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz;$$

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int z^{-3} \left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz.$$

El primer factor es una función racional. Para que el segundo factor sea racional también efectuemos la sustitución:

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = t;$$

Entonces:

$$\frac{1+z}{z} = t^2; \quad z = \frac{1}{t^2-1}; \quad dz = \frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}.$$

Por consiguiente:

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \int z^{-3} \left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^2-1)^3 t^{-3} \frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2} = -\int \frac{t^2-1}{t^2} dt = -t - \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}} + C = -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Observación. P.L. Chébishev, destacado matemático ruso, demostró que la integral de los binomios diferenciales, con exponentes racionales puede expresarse mediante funciones elementales solamente en los tres casos citados; (por supuesto, a condición de que $a \neq 0$ y $b \neq 0$). Si ninguno de los números p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ es entero, esta integral no puede ser expresada por funciones elementales.

§ 14. INTEGRACION DE CIERTAS CLASES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Hasta ahora hemos estudiado sistemáticamente las integrales de funciones algebraicas (racionales o irracionales). En el párrafo presente examinemos las integrales de ciertas clases de funciones no algebraicas, en primer lugar, de las funciones trigonométricas.

Examinemos la integral

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx. \qquad (1)$$

Demostremos que esta integral, con ayuda de la sustitución,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad (2)$$

se reduce siempre a una integral de una función racional. Expresemos sen x y cos x en función de tg $\frac{x}{2}$ y, por consiguiente, en función de t:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Luego,

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Así, sen x, cos x y dx quedan expresadas mediante funciones *racionales de t. Puesto que una función racional de funciones racionales* es también racional, sustituyendo las expresiones obtenidas en la integral (1), ésta se reduce a una integral de función racional:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo 1. Analicemos la integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

En virtud de las fórmulas expuestas, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

La sustitución examinada ofrece la posibilidad de integrar cualquier función del tipo $R(\cos x, \operatorname{sen} x)$. Por eso, se llama, a veces «sustitución trigonométrica universal». Sin embargo, en la práctica esta sustitución conduce a menudo a funciones racionales demasiado complicadas. Por esto, siempre es preferible conocer, aparte de la sustitución «universal» otras sustituciones, que, a veces, conducen más rápidamente al objetivo.

1) Si la integral tiene la forma $\int R(\operatorname{sen} x) \cos x\, dx$, la sustitución $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\, dx = dt$, reduce la integral a una integral de la forma $\int R(t)\, dt$.

2. Si la integral tiene la forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$, la sustitución $\cos x = t$, $\operatorname{sen} x\, dx = -dt$, reduce la integral a una integral de función racional.

3) Si el integrando sólo es función de $\operatorname{tg} x$, la sustitución $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ reduce la integral a una integral de función racional:

$$\int R(\operatorname{tg} x)\, dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Si el integrando tiene la forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, donde las potencias de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$ son exclusivamente pares, se usa la misma sustitución:

$$\operatorname{tg} x = t, \tag{2'}$$

puesto que $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ se expresan mediante expresiones racionales de $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Después de realizar la sustitución, obtenemos la integral de una función racional.

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\, dx$.

Solución. Esta integral se reduce fácilmente a una de la forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$.

En efecto,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx}{2+\cos x}=\int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\operatorname{sen} x\,dx.$$

Efectuemos la sustitución $\cos x=z$. Entonces, $\operatorname{sen} x\,dx=-dz$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz)=\int \frac{z^2-1}{z+2}\,dz=\int \left(z-2+\frac{3}{z+2}\right)dz=$$

$$=\frac{z^2}{2}-2z+3\ln(z+2)+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

Ejemplo 3. Calcular $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}$.

Efectuemos la sustitución $\operatorname{tg} x=t$:

$$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}=\int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}=\int \frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

5) Examinemos ahora una integral más, de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, aquí bajo el signo de integral se encuentra el producto $\operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ (donde m y n son números enteros). Es preciso estudiar tres casos.

a) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, donde por lo menos uno de los números m y n es impar. Para evitar toda ambigüedad, supongamos que n es impar. Hagamos $n=2p+1$ y transformemos la integral:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p+1} x\,dx=\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p} x \cos x\,dx=$$

$$=\int \operatorname{sen}^m x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)^p \cos x\,dx.$$

Efectuemos el cambio de variable:

$$\operatorname{sen} x=t,\quad \cos x\,dx=dt.$$

Sustituyendo la nueva variable en la integral dada, obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx=\int t^m(1-t^2)^p\,dt,$$

que es la integral de una función racional de t.

Ejemplo 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x \cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}=\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}.$$

Designando $\operatorname{sen} x=t$, $\cos x\,dx=dt$, obtenemos:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx=\int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4}=\int \frac{dt}{t^4}-\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C.$$

b) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, donde m y n son números no negativos y pares.

Pongamos $m = 2p$, $n = 2q$. Escribamos las conocidas fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \qquad (3)$$

Sustituyéndolas en la integral, obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^{2p} x \cos^{2q} x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Ejecutando operaciones de elevar a potencia y abrir los paréntesis, obtenemos términos que contienen $\cos 2x$ en potencias pares e impares. Los términos que contienen las potencias impares, se integran como hemos indicado en el caso a). Los términos que tienen las potencias pares, los reduciamos de nuevo, utilizando sucesivamente las fórmulas (3). Procediendo de esta manera llegamos hasta los términos de la forma $\int \cos kx \, dx$, que pueden integrarse fácilmente.

Ejemplo 5.

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \frac{1}{2^2} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x) \, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right] + C.$$

c) Si los dos exponentes son pares y, por lo menos, uno de ellos es negativo, el método indicado en el caso anterior b) no da resultado. Es preciso hacer la sustitución

$$\operatorname{tg} x = t \quad (\text{ó } \operatorname{cotg} x = t).$$

Ejemplo 6.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \, dx.$$

Hagamos $\operatorname{tg} x = t$, entonces, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ y obtenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} dx = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 (1+t^2) \, dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

6) En conclusión examinemos las integrales de la forma siguiente:

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Estas se pueden calcular con ayuda de las siguientes*) fórmulas ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Sustituyendo e integrando, obtenemos:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Del modo análogo se calculan las otras dos integrales.

Ejemplo 7.

$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 8x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

§ 15. INTEGRACION DE CIERTAS FUNCIONES IRRACIONALES CON AYUDA DE SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

Regresemos a la integral examinada en el § 12 cap. X,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx \tag{1}$$

Mostremos aquí cómo esta integral puede transformarse en una integral de la forma

$$\int \bar{R}(\operatorname{sen} z, \cos z)\, dz, \tag{2}$$

estudiada en el párrafo anterior.

---

*) Estas fórmulas se calculan fácilmente de la manera siguiente:

$$\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx,$$

$$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx.$$

Sumando estas igualdades término a término y dividiéndolas por dos, obtenemos la primera de las tres fórmulas indicadas. Restando término a término y dividiendo por dos, obtenemos la tercera de estas fórmulas. La segunda fórmula se obtiene de modo análogo, escribiendo las igualdades idénticas para $\operatorname{sen}(m+n)x$ y $\operatorname{sen}(m-n)x$ y sumándolas término a término.

Transformemos el trinomio que figura bajo signo de la raíz:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Efectuemos el cambio de variable, haciendo

$$x + \frac{b}{2a} = t, \qquad dx = dt.$$

Entonces:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Examinemos todos los casos posibles.

1. Sea: $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Introduzcamos las designaciones $a = m^2$, $c - \frac{b}{4a} = n^2$. En este caso tenemos:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2t^2 + n^2}.$$

2) Sea: $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Entonces, $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$. Por consiguiente,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2t^2 - n^2}.$$

3) Sea: $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Entonces, $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. Por consiguiente,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2t^2}.$$

4) Sea: $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. En este caso $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ es un número complejo, para todo valor de x.

Así, la integral (1) puede reducirse a una de las siguientes clases de integrales:

$$\text{I.} \quad \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2}\right) dt. \qquad (3.1)$$

$$\text{II.} \quad \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2}\right) dt. \qquad (3.2)$$

$$\text{III.} \quad \int R\left(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2}\right) dt. \qquad (3.3)$$

Es evidente que la integral (3.1) se reduce a una integral de la forma (2), con ayuda de la sustitución $t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z$. La integral (3.2) se reduce a una integral de la forma (2) mediante la sustitución

$t = \frac{n}{m} \sec z$. La integral (3.3) se reduce a una integral de la forma (2) mediante la sustitución $t = \frac{n}{m} \operatorname{sen} t$.

Ejemplo. Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

Solución. Es la integral del tipo III. Hagamos la sustitución $x = a \operatorname{sen} z$, entonces: $dx = a \cos z \, dz$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2-a^2 \operatorname{sen}^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

§ 16. FUNCIONES CUYAS INTEGRALES NO PUEDEN EXPRESARSE MEDIANTE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos indicado (sin demostración) en el § 1 cap. X que toda función $f(x)$, continua en el intervalo (a, b), tiene en este intervalo una función primitiva, es decir, existe una función $F(x)$ tal que

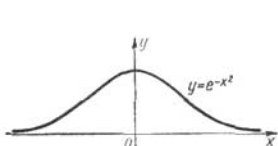


Fig. 204

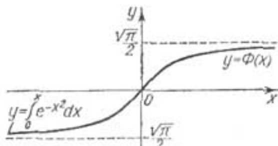


Fig. 205

$F'(x) = f(x)$. Sin embargo, no **cada función primitiva,** incluso cuando ésta existe, **puede expresarse mediante un número finito de funciones elementales.**

Así, por ejemplo, hemos indicado, que las funciones primitivas de los binomios diferenciales no pertenecientes a las tres formas estudiadas, no pueden ser expresadas mediante un número finito de funciones elementales (teorema de Chébishev). Tales son, por ejemplo, las funciones primitivas expresadas por las integrales

$$\int e^{-x^2} \, dx, \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx, \int \frac{\cos x}{x} \, dx, \int \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen} x} \, dx, \int \frac{dx}{\ln x}$$

y muchas otras.

En todos estos casos la función primitiva representa evidentemente, otra función que no se expresa mediante una combinación de un número finito de funciones elementales.

Así, por ejemplo, la función primitiva $\int e^{-x^2}dx + C$, que se anula para $x = 0$, se llama *función de Laplace* y se designa por $\Phi(x)$. Por tanto,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C_1, \text{ si } \Phi(0) = 0.$$

Esta función está bien estudiada. Existen tablas de sus valores para diferentes valores de x. En el § 21 cap. XVI (tomo II) veremos, como puede ser realizado esto. En las figuras 204 y 205 se dan respectivamente la gráfica del integrando

$$y = e^{-x^2}$$

y la gráfica de la función de Laplace $y = \Phi(x)$. La función primitiva

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C \qquad (k < 1)$$

que se anula cuando x sea igual a cero, se llama *integral elíptica* y se designa por $E(x)$,

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C_2, \text{ si } E(0) = 0.$$

Existen también tablas de los valores de esta función para diferentes valores de x.

Ejercicios para el capítulo X

I. Calcular las integrales:

1. $\int x^5\, dx$. *Resp.* $\frac{x^6}{6} + C$. 2. $\int (x + \sqrt{x})\, dx$. *Resp.* $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. 3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx$. *Resp.* $6\sqrt{x} - \frac{1}{10} x^2 \sqrt{x} + C$. 4. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x}}$. *Resp.* $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$. 5. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2\right) dx$. *Resp.* $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$. 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. *Resp.* $\frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$. 7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. *Resp.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4} x^2 \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

Integración por sustitución: 8. $\int e^{5x}\, dx$. *Resp.* $\frac{1}{5} e^{5x} + C$. 9. $\int \cos 5x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + C$. 10. $\int \operatorname{sen} ax\, dx$. *Resp.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$. 11. $\int \frac{\ln x}{x} dx$. *Resp.* $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. 12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3} + C$. 13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. 14. $\int \frac{dx}{3x - 7}$. *Resp.* $\frac{1}{3} \ln|3x - 7| + C$. 15. $\int \frac{dx}{1 - x}$. *Resp.* $-\ln|1 - x| + C$. 16. $\int \frac{dx}{5 - 2x}$. *Resp.* $-\frac{1}{2} \ln|5 - 2x| + C$. 17. $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$.

Resp. $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$. 18. $\int \operatorname{cotg}(5x-7)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x-7)|+C$. 19. $\int \frac{dy}{\operatorname{cotg} 3y}$. *Resp.* $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3y|+C$. 20. $\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3}\,dx$. *Resp.* $3\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right|+C$. 21. $\int \operatorname{tg}\varphi\,\operatorname{sc}^2\varphi\,d\varphi$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+C$. 22. $\int(\operatorname{cotg} e^x)\,e^x\,dx$. *Resp.* $\ln|\operatorname{sen} e^x|+C$. 23. $\int\left(\operatorname{tg}4S-\operatorname{cotg}\frac{S}{4}\right)dS$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\ln|\cos 4S|-$ $-4\ln\left|\operatorname{sen}\frac{S}{4}\right|+C$. 24. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C$. 25. $\int \cos^3 x\operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$. 26. $\int\sqrt{x^2+1}\,x\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. 27. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$. 28. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$. 29. $\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C$. 30. $\int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^3 x}$. *Resp.* $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$. 31. $\int\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$. 32. $\int\frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}+C$. 33. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$. *Resp.* $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$. 34. $\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C$. 35. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}}$. *Resp.* $\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}+C$. 36. $\int\frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{(1+\cos 2x)^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C$. 37. $\int\frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resp.* $2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}+C$. 38. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x+1)^3}+C$. 39. $\int\frac{\cos 2x\,dx}{(2+3\operatorname{sen} 2x)^3}$. *Resp.* $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\operatorname{sen} 2x)^2}+C$. 40. $\int\frac{\operatorname{sen} 3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$. 41. $\int\frac{\ln^2 x\,dx}{x}$. *Resp.* $\frac{\ln^3 x}{3}+C$. 42. $\int\frac{\operatorname{arcsen} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2}+C$. 43. $\int\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C$. 44. $\int\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$. 45. $\frac{\operatorname{arccotg} x}{1+x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{arccotg}^2 x}{2}+C$. 46. $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 47. $\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$. 48. $\int\frac{\cos x\,dx}{2\operatorname{sen} x+3}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen} x+3)+C$. 49. $\int\frac{dx}{x\ln x}$. *Resp.* $\ln|\ln x|+C$. 50. $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$. *Resp.* $\frac{(x^2+1)^5}{5}=C$. 51. $\int\operatorname{tg}^4 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$. 52. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. *Resp.* $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. 53. $\int\frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x+1|+C$. 54. $\int\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. 55. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x}$.

Resp. $\ln|\operatorname{arcsen} x|+C$. **56.** $\int \frac{\cos 2x}{2+3\operatorname{sen} 2x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{6}\ln|2+3\operatorname{sen} 2x|+C$.
57. $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$. *Resp.* $\operatorname{sen}(\ln x)+C$. **58.** $\int \cos(a+bx)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{b}\operatorname{sen}(a+bx)+C$. **59.** $\int e^{2x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}e^{2x}+C$. **60.** $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$. *Resp.* $3e^{\frac{x}{3}}+C$. **61.** $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$. *Resp.* $e^{\operatorname{sen} x}+C$. **62.** $\int a^{x^2}x\,dx$. *Resp.* $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$. **63.** $\int e^{\frac{x}{a}}\,dx$. *Resp.* $ae^{\frac{x}{a}}+C$. **64.** $\int (e^{2x})^2\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{4}e^{4x}+C$.
65. $\int 3^x e^x\,dx$. *Resp.* $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$. **66.** $\int e^{-3x}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$.
67. $\int (e^{5x}+a^{5x})\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\ln a}+C\right)$. **68.** $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$. **69.** $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$.
70. $\int \frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$. **71.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$. **72.** $\int \frac{dx}{1+2x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$. **73.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}x)+C$. **74.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{4}+C$.
75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. *Resp.* $\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+C$. **76.** $\int \frac{dx}{4+x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.
77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Resp.* $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$. **78.** $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$. **79.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. *Resp.* $\ln|x+\sqrt{x^2+9}|+C$. **80.** $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$. **81.** $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}|+C$. **82.** $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$. **83.** $\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}$. *Resp.* $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$. **84.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2+C$.
85. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. *Resp.* $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$. **86.** $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Resp.* $\operatorname{arcsen} e^x+C$. **87.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{3}}\,x+C$. **88.** $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{a}\right)+C$. **89.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. *Resp.* $\operatorname{arcsen}(\ln x)+C$.

90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C$. **91.** $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$. **92.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$. **93.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C$. **94.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. *Resp.* $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$. **95.** $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. *Resp.* $\operatorname{arctg} e^x + C$. **96.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resp.* $3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} + C$. **97.** $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\operatorname{sen} 2x\,dx$. *Resp.* $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3} + C$. **98.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. *Resp.* $-2\sqrt{1+\cos^2 x} + C$. **99.** $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$. **100.** $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x} + C$. **101.** $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg} x\right) + C$. Integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$. **102.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$. **103.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$. **104.** $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + C$. **105.** $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$. **106.** $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$. *Resp.* $\operatorname{arctg}(2z-1) + C$. **107.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C$. **108.** $\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$. *Resp.* $\ln|3x^2-7x+11| + C$. **109.** $\int \frac{(3x-2)\,dx}{5x^2-3x+2}$. *Resp.* $\frac{3}{10}\ln(5x^2-3x+2) - \frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C$. **110.** $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. **111.** $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$. **112.** $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2) + \frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C$. **113.** $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx$. *Resp.* $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}} + C$. **114.** $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}} + C$. Integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}}\,dx$:

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\arcsen\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$. 116. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. *Resp.* $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$. 117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. *Resp.* $\ln|S+a+\sqrt{2aS+S^2}|+C$. 118. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsen\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+$ $+C$. 119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}|+C$. 120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. *Resp.* $\arcsen\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$. 121. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}|+C$. 122. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. *Resp.* $2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$. 123. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+$ $+\frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C$. 124. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$. 125. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+$ $+\frac{7}{4}\arcsen\frac{2x-1}{2}+C$. 126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+$ $+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln(4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$.

II. Integración por partes:

127. $\int xe^x\,dx$. *Resp.* $e^x(x-1)+C$. 128. $\int x\ln x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$. 129. $\int x\operatorname{sen}x\,dx$. *Resp.* $\operatorname{sen}x-x\cos x+C$. 130. $\int \ln x\,dx$. *Resp.* $x(\ln x-1)+C$. 131. $\int \arcsen x\,dx$. *Resp.* $x\arcsen x+\sqrt{1-x^2}+C$. 132. $\int \ln(1-x)\,dx$. *Resp.* $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$. 133. $\int x^n\ln x\,dx$. *Resp.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$. 134. $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arctg}x-x]+C$. 135. $\int x\arcsen x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsen x+x\sqrt{1-x^2}]+C$. 136. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. *Resp.* $x\ln(x+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$. 137. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. *Resp.* $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-$ $-\sqrt{x}+C$. 138. $\int \frac{\arcsen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resp.* $2\sqrt{x}\arcsen\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

139. $\int \arcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. *Resp.* $x\arcsen\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

140. $\int x\cos^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **141.** $\int\frac{x\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $x-\sqrt{1-x^2}\arcsen x+C$. **142.** $\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{(x^2+1)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{x}{4(1+x^2)}+$ $+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}+C$. **143.** $\int x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$. **144.** $\int\frac{\arcsen x}{x^2}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\arcsen x+C$. **145.** $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. *Resp.* $x\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\sqrt{1+x^2}+C$. **146.** $\int\arcsen x\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

Utilizar sustituciones trigonométricas en los ejemplos siguientes:

147. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsen\frac{x}{a}+C$. **148.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. *Resp.* $2\arcsen\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$. **149.** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Resp.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **150.** $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$. **151.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Integración de las fracciones racionales:

152. $\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$. **153.** $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. *Resp.* $\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}$. **154.** $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. *Resp.* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$ $+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. **155.** $\int\frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. *Resp.* $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)}{(x+1)^3}+$ $+\frac{16}{3}\ln(x+2)+C$. **156.** $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. *Resp.* $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{x-2}{x-1}+C$. **157.** $\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$. **158.** $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. *Resp.* $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$. **159.** $\int\frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. *Resp.* $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+$ $+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$. **160.** $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$. *Resp.* $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **161.** $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **162.** $\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{x^2+4}{p\sqrt{x^2+}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

163. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. *Resp.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **164.** $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **165.** $\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$ $+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. **166.** $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{3}[x^3+\ln(x^3-1)]+C$.

167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

168. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. *Resp.* $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$.

169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$. *Resp.* $\ln\frac{x-1}{x}-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$.

Integración de las funciones irracionales **170.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$. **171.** $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-$ $-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$. **172.** $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\ln x-$ $-24\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C$. **173.** $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-$ $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln(\sqrt[6]{x}+1)+\frac{3}{2}\ln(\sqrt[6]{x^2}+1)+$ $+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **174.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$ *Resp.* $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-$ $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$. **175.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$. *Resp.* $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$ $+\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}+C$. **176.** $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$. *Resp.* $14\Big[\sqrt[14]{x}-$ $-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\Big]+C$. **177.** $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left(x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C$. Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: **178.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$. **179.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$. **180.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. *Resp.*

$\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$. **181.** $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$. **182.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$.

183. $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\operatorname{arcsen}(x-1)]+C$.

184. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. *Resp.* $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$.

185. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. *Resp.* $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$.

186. $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$. **187.** $\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$. **188.** $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C$.

Integración de los binomios diferenciales:

189. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. *Resp.* $2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C$. **190.** $\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}dx$. *Resp.* $\frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C$. **191.** $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. *Resp.* $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **192.** $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. *Resp.* $-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right)+C$. **193.** $\int\sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\,dx$. *Resp.* $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}}+C$. **194.** $\int\frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}$.

195. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{5x^3-3}{40}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}$.

Integración de las funciones trigonométricas:

196. $\int\operatorname{sen}^3x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$. **197.** $\int\operatorname{sen}^5x\,dx$. *Resp.* $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{\cos^5x}{5}+C$. **198.** $\int\cos^4x\operatorname{sen}^3x\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{5}\cos^5x+\frac{1}{7}\cos^7x+C$.

199. $\int\frac{\cos^3x}{\operatorname{sen}^4x}\,dx$. *Resp.* $\csc x-\frac{1}{3}\csc^3x+C$. **200.** $\int\cos^2x\,dx$. *Resp.* $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+C$. **201.** $\int\operatorname{sen}^4x\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{8}x-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+C$.

202. $\int\cos^6x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{16}\left(5x+4\operatorname{sen}2x-\frac{\operatorname{sen}^32x}{3}+\frac{3}{4}\operatorname{sen}4x\right)+C$.

203. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$. *Resp.* $\frac{1}{128}\left(3x-\operatorname{sen} 4x+\frac{\operatorname{sen} 8x}{8}\right)+C$. **204.** $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$. **205.** $\int \operatorname{cotg}^5 x\, dx$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+$ $+\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **206.** $\int \operatorname{cotg}^3 x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}-\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **207.** $\int \operatorname{sc}^3 x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5}+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$. **208.** $\int \operatorname{tg}^4 x \operatorname{sc}^4 x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. **209.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. *Resp.* $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **210.** $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$. *Resp.* $C-\csc x$. **211.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. *Resp.* $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x+3\cos^{-\frac{1}{3}} x+C$. **212.** $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$. **213.** $\int \cos 4x \cos 7x\, dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen} 11x}{22}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{6}+C$. **214.** $\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$. **215.** $\int \operatorname{sen}\frac{1}{4}x\cos\frac{3}{4}x\, dx$. *Resp.* $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{1}{2}x+C$. **216.** $\int \frac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$. **217.** $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **218.** $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+x+C$. **219.** $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$. *Resp.* $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **220.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}dx$. *Resp.* $\operatorname{arctg}(2\operatorname{sen}^2 x-1)+C$. **221.** $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+C$. **222.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{cotg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$. **223.** $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx$. *Resp.* $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$.

CAPITULO XI

INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. PLANTEO DEL PROBLEMA. SUMAS INTEGRALES INFERIOR Y SUPERIOR

Un medio potente de investigación en las matemáticas, física, mecánica y otras ramas de la ciencia es la **integral definida**, uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. El cálculo

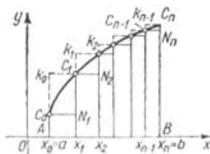


Fig. 206

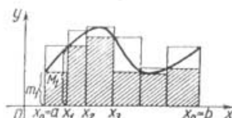


Fig. 207

de las áreas limitadas por las curvas, de las longitudes de arcos, volúmenes, trabajo, velocidad, espacio, momentos de inercia, etc., se reduce al cálculo de una integral definida.

Sea $y = f(x)$ una función **continua** dada sobre el segmento $[a, b]$ (figs. 206 y 207). Designemos por m y M sus valores mínimo y máximo respectivamente en este segmento. Dividamos mediante los puntos el segmento $[a, b]$ en n partes

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b,$$

en este caso,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n,$$

y pongamos:

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Designemos ahora los valores mínimo y máximo de la función $f(x)$

en el segmento $[x_0, x_1]$, por m_1 y M_1,
en el segmento $[x_1, x_2]$, por m_2 y M_2,

. . . .

en el segmento $[x_{n-1}, x_n]$, por m_n y M_n respectivamente.

Formemos las sumas:

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad (1)$$

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \qquad (2)$$

$\underline{s}_n$ se llama *suma integral inferior* y $\bar{s}_n$, *suma integral superior.*

Si $f(x) \geqslant 0$, la suma integral inferior es numéricamente igual al área de la «figura escalonada inscrita» $AC_0N_1C_1N_2 \ldots C_{n-1}N_nBA$, limitada por una línea quebrada «inscrita». La suma integral superior es numéricamente igual al área de la «figura escalonada circunscrita» $AK_0C_1K_1 \ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$, limitada por una línea quebrada «circunscrita».

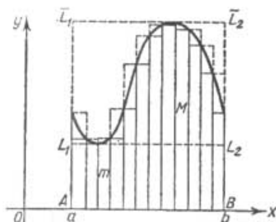


Fig. 208

Analicemos algunas propiedades de las sumas integrales, superiores e inferiores.

a) Dado que $m_i \leqslant M_i$ para cualquier i ($i = 1, 2, \ldots, n$), en virtud de las fórmulas (1) y (2) tenemos:

$$\underline{s}_n \leqslant \bar{s}_n.$$

(El signo de igualdad sólo corresponde al caso en que $f(x) = \text{const}$).

b) Dado que

$$m_1 \geqslant m, \ m_2 \geqslant m, \ \ldots, \ m_n \geqslant m,$$

donde m es el valor mínimo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, tenemos:

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n \geqslant m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + m \Delta x_n = m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = m(b-a).$$

Así:

$$\underline{s}_n \geqslant m(b-a)$$

c) Dado que

$$M_1 \leqslant M, \ M_2 \leqslant M, \ \ldots, \ M_n \leqslant M,$$

donde M es el valor máximo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, tenemos:

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n \leqslant M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + M \Delta x_n = M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = M(b-a).$$

Así:

$$\bar{s}_n \leqslant M(b-a).$$

Uniendo dos desigualdades obtenidas, tenemos:

$$m(b-a) \leqslant \underline{s}_n \leqslant \bar{s}_n \leqslant M(b-a).$$

Si $f(x) \geqslant 0$, la última desigualdad tiene una interpretación geométrica simple (fig. 208), puesto que los productos $m(b-a)$ y $M(b-a)$ son numéricamente iguales a las áreas respectivas del rectángulo «inscrito» AL_1L_2B y del «circunscrito» $A\bar{L}_1\bar{L}_2B$.

§ 2. INTEGRAL DEFINIDA

Continuemos el examen del problema del párrafo anterior. En cada uno de los segmentos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ elijamos un punto que designamos respectivamente por $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

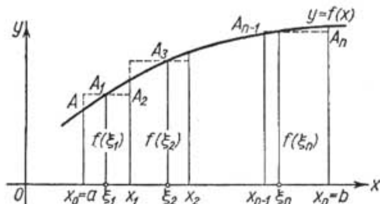


Fig. 209

(fig. 209):

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \ x_1 < \xi_2 < x_2, \ \ldots, \ x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

En cada uno de estos puntos calculemos el valor de la función $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $\ldots$, $f(\xi_n)$ y formemos la suma:

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

y todos los $\Delta x_i > 0$, entonces,

$$m_i \Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$$

ó

$$\underline{s}_n \leqslant s_n \leqslant \overline{s}_n. \qquad (2)$$

La interpretación geométrica de la última desigualdad es que, para $f(x) \geqslant 0$, la figura cuya área es igual a s_n, está limitada por una línea quebrada, comprendida entre las líneas quebradas «inscrita» y «circunscrita».

La suma s_n depende del modo de dividir el segmento $[a, b]$ en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, así como de la elección de los puntos ξ_i dentro de estos segmentos.

Designemos por máx $[x_{n-1}, x_i]$ la mayor longitud de los segmentos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{n-1}, x_n]$. Examinemos diferentes divisiones del segmento $[a, b]$ en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ tales que máx $[x_{i-1}, x_i] \to 0$.

Es evidente que, en el proceso de división, el número n de segmentos tiende al infinito. Eligiendo los valores correspondientes de ξ_i, se puede formar, para cada división, la suma integral

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\,\Delta x_i,$$

de modo que se puede hablar de la división sucesiva y la secuencia respectiva de las sumas integrales. Supongamos que, para una sucesión de divisiones elegida, cuando máx $\Delta x_i \to 0$, esta suma*) tiende a un límite I.

Si para las divisiones arbitrarias del segmento $[a, b]$, tales que máx $\Delta x_i \to 0$, y la elección cualquiera de los puntos ξ_i, la suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ tiende a un mismo límite I, se dice que la función $f(x)$, que es un integrando, es *integrable* en el segmento $[a, b]$; el límite I se llama *integral definida* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se designa por: $\int_a^b f(x)\,dx$. Entonces podemos escribir:

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_j \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

* En el caso dado, la suma es una magnitud variable ordenada.

Los números a y b se llaman, respectivamente, *límite inferior* y *superior* de la integral. El segmento $[a, b]$ se llama *segmento de integración*, la letra x, *variable de integración.*

Notemos sin demostración que *si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, es integrable en el mismo segmento.*

Si para cierta sucesión de las divisiones, tales que máx $\Delta x_i \to 0$ estudiamos la secuencia de las sumas integrales inferiores $\underline{s}_n$ y las sumas integrales superiores $\overline{s}_n$ para una función continua $f(x)$, es evidente que estas sumas tenderán a un mismo límite I, es decir, a la integral definida de la función $f(x)$:

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Entre las funciones discontinuas hay funciones integrables y no integrables.

Si construimos la gráfica del integrando $y = f(x)$ entonces, en el caso de $f(x) \geqslant 0$, la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

será numéricamente igual al área de así llamado *trapecio curvilíneo* formado por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox (fig. 210).

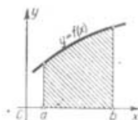


Fig. 210

Por consiguiente, el área Q de un trapecio curvilíneo comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox se calcula mediante la integral

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Observación 1. Notemos que la integral definida depende sólo de la forma de la función $f(x)$ y de los límites de integración, pero no depende de la variable de integración. Esta última puede desig-

narse por cualquiera letra. Por eso se puede, sin cambiar el valor de la integral definida sustituir la letra x por cualquiera otra.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Al introducir el concepto de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que $a < b$. Si $b < a$, según la definición tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Así, por ejemplo,

$$\int_5^0 x^2\,dx = -\int_0^5 x^2\,dx.$$

Finalmente, si $a = b$, según la definición, para toda función $f(x)$ tenemos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \qquad (5)$$

Esto es natural también desde el punto de vista geométrico. En efecto, la longitud de la base del trapecio curvilíneo es cero, por tanto, su área también es igual a cero.

Ejemplo 1. Hallar la integral $\int_a^b kx\,dx\ (b > a)$.

Solución. Desde el punto de vista geométrico el problema se reduce al cálculo del área Q de un trapecio, comprendida entre las líneas $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 211).

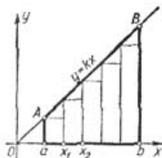


Fig. 211

La función $y = kx$, que se halla bajo el signo de integral, es continua. Por consiguiente, para calcular la integral definida se puede, como hemos indicado más arriba, dividir arbitrariamente el segmento $[a, b]$ y elegir cualesquiera puntos intermedios ξ_k. El resultado del cálculo de la integral definida no depende del método de formación de la suma integral; siendo que el paso de la división tienda al cero.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales. La longitud Δx de cada segmento parcial es igual a:

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Este número se llama «paso» de la división. Las coordenadas de los puntos de división son:

$$a = x_0,\ x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x.$$

Como puntos ξ_k tomemos los extremos izquierdos de cada segmento:

$$\xi_1 = a,\ \xi_2 = a + \Delta x,\quad \xi_3 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\quad \xi_n = a + (n-1)\,\Delta x.$$

Formemos la suma integral (1). Siendo $f(\xi_i) = k\xi_i$, tenemos:

$$s_n = k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \ldots + k\xi_n\Delta x = ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\,\Delta x + \ldots +$$
$$+ \{k\,[a + (n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x = k\,\{a + (a+\Delta x) + (a + 2\Delta x) + \ldots +$$
$$+ [a + (n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x = k\,\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \ldots + (n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x =$$
$$= k\,\{na + [1 + 2 + \ldots + (n-1)]\,\Delta x\}\,\Delta x,$$

donde $\Delta x = \frac{b-d}{n}$. Teniendo en cuenta que

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(como suma de una progresión aritmética), tenemos:

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\,\frac{b-a}{2}\right](b-a).$$

Puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1,$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Así,

$$\int_a^b kx\,dx = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Es fácil calcular el área $ABba$ (fig. 211), usando los métodos de la geometría elemental. El resultado será el mismo.

Ejemplo 2. Calcular $\int_0^b x^2\,dx$.

Solución. La integral dada es igual al área Q del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y = x^2$, la ordenada $x = b$ y la recta $y = 0$ (fig. 212).

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales por medio de los puntos:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = b = n\Delta x,$$
$$\Delta x = \frac{b}{n}.$$

Como los puntos ξ_i tomemos los extremos derechos de cada segmento.

Formemos la suma integral

$$s_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n^2\Delta x =$$

$$= [(\Delta x)^2\,\Delta x + (2\Delta x)^2\,\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2\,\Delta x] = (\Delta x)^3\,[1^2+2^2+\ldots+n^2].$$

Como es sabido:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

por esto:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = \int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$



Fig. 212

Ejemplo 3. Calcular $\int_a^b m\,dx$ $(m = \text{const})$.

Solución

$$\int_a^b m\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0} m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i =$$

$$= m\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = m\,(b-a).$$

Aquí, $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$ es la suma de las longitudes de los segmentos parciales que componen el segmento $[a, b]$.

Cualquiera que sea el modo de la división, esta suma es igual a la longitud del segmento $b-a$.

Ejemplo 4. Calcular $\int\limits_a^b e^x\,dx$.

Solución. Dividamos de nuevo el segmento $[a, b]$ en n partes iguales:

$$x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ \ldots,\ x_n=a+n\Delta x;\ \Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Como puntos ξ tomemos los extremos izquierdos. Formemos la suma integral

$$S_n=e^a\Delta x+e^{a+\Delta x}\Delta x+\ldots+e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x=$$
$$=e^a(1+e^{\Delta x}+e^{2\Delta x}+\ldots+e^{(n-1)\Delta x})\,\Delta x.$$

La expresión comprendida entre paréntesis es una progresión geométrica cuya razón es $e^{\Delta x}$, y el primer término igual a 1; por esto:

$$S_n=e^a\frac{e^{n\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1}\Delta x=e^a(e^{n\Delta x}-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}.$$

Luego tenemos:

$$n\Delta x=b-a;\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}=1.$$

Según la regla de l'Hospital

$$\lim_{z=0}\frac{z}{e^z-1}=\lim_{z=0}\frac{1}{e^z}=1.$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=Q=e^a(e^{b-a}-1)\cdot 1=e^b-e^a$, es decir: $\int\limits_a^b e^x\,dx=e^b-e^a$.

Observación 2. Los ejemplos examinados muestran que el cálculo directo de las integrales definidas como límites de sumas integrales presenta grandes dificultades. Incluso, en los casos en que los integrandos son muy simples (kx, x^2, e^x), este método requiere cálculos laboriosos. El cálculo de las integrales definidas de las funciones complicadas es aún más difícil. Es natural que surge el problema de encontrar un método cómodo para el cálculo de las integrales definidas. Este método, descubierto por Newton y Leibniz, utiliza la relación lógica que existe entre la integración y la derivación.

Los párrafos ulteriores del presente capítulo se dedican a la exposición y argumentación del método mencionado.

§ 3. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Propiedad 1. El *factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral definida: si* $A = \text{const}$,

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

Demostración.

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\,\Delta x_i =$$
$$= A\lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

Propiedad 2. La *integral definida de la suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de los sumandos.* Por ejemplo, en el caso de dos sumandos:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{2}$$

Demostracion.

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i\right] =$$
$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i +$$
$$+ \lim_{\text{máx}\,\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i =$$
$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

La demostración es válida para cualquier número de sumandos.

Las propiedades 1 y 2 demostradas para el caso en que $a < b$, son válidas también para el caso en que $a \geqslant b$.

Sin embargo, la propiedad siguiente es válida sólo cuando $a < b$.

Propiedad 3. Si *en el segmento* $[a, b]$, *donde* $a < b$, *las funciones* $f(x)$ y $\varphi(x)$ *satisfacen a la condición* $f(x) \leqslant \varphi(x)$, *entonces*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Demostración. Examinemos la diferencia

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\,\Delta x_i.$$

Aquí, cada diferencia $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geqslant 0$, $\Delta x_i \geqslant 0$. Por consiguiente, cada sumando de la suma no es negativo, igual que no es negativa toda la suma ni su límite, es decir,

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0$$

ó

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

de donde se deduce la desigualdad (3).

Si $f(x) > 0$ y $\varphi(x) > 0$, la figura 213 da una ilustración geométrica de esta propiedad. Puesto que $\varphi(x) \geqslant f(x)$, el área del trapecio curvilíneo aA_1B_1b no es mayor que el área del trapecio curvilíneo aA_2B_2b.

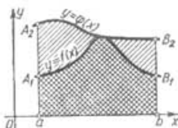


Fig. 213

Propiedad 4. *Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y $a \leqslant b$, entonces:*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (4)$$

Demostración. Según la hipótesis,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

En virtud de la propiedad (3), tenemos:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx. \qquad (4')$$

Pero

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a), \quad \int_a^b M\,dx = M\cdot(b-a)$$

(véase el ejemplo 3, § 2, cap. XI). Sustituyendo estas expresiones en la desigualdad (4′) obtenemos la desigualdad (4).

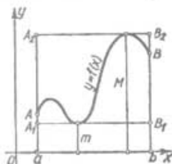


Fig. 214

Cuando $f(x) \geqslant 0$, la propiedad 4 se ilustra geométricamente en la fig. 214: el área del trapecio curvilíneo $aABb$ está comprendida entre las áreas de los rectángulos aA_1B_1b y aA_2B_2b.

Propiedad 5. (Teorema de la media)

Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, existe en este segmento un punto ξ tal que se verifique la igualdad siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi)\,. \tag{5}$$

Demostración. Para precisar supongamos que $a < b$. Si m y M son valores mínimo y máximo, respectivamente, de la $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, en virtud de la fórmula (4) tenemos:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

De aquí:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu, \text{ donde } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Puesto que $f(x)$ es continua, esta función toma todos los valores intermedios comprendidos entre m y M. Por tanto, para cierto valor ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ será $\mu = f(\xi)$, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Propiedad 6. *Para tres números arbitrarios a, b, c se verifica la igualdad:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

siempre que *estas tres integrales existen.*

Demostración. Supongamos al principio que $a < c < b$, y formemos la suma integral para la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

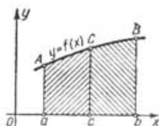


Fig. 215

Puesto que el límite de la suma integral no depende del modo de dividir el segmento $[a, b]$ en partes, lo dividimos en segmentos pequeños de tal manera que c sea el punto de división. Descompongamos luego la suma integral $\sum\limits_a^b$ correspondiente al segmento $[a, b]$ en dos sumas: una $\sum\limits_a^c$, que corresponde al segmento $[a, c]$ y la otra $\sum\limits_c^b$ que es correspondiente al segmento $[c, b]$.

Entonces:

$$\sum_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Tomando límites (en la última ecuación) para máx $\Delta x_i \to 0$ obtenemos la correlación (6).

Si $a < b < c$, en virtud de lo demostrado podemos escribir:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Pero, de acuerdo con la fórmula (4), § 2 tenemos:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

Por esto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

De modo análogo se demuestra la propiedad 6 para cualquiera otra disposición de los puntos a, b y c.

La figura 215 ilustra geométricamente la propiedad 6 para el caso en que $f(x) > 0$, y $a < c < b$: el área del trapecio $aABb$ es igual a la suma de las áreas de los trapecios $aACc$ y $cCBb$.

§ 4. CALCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA. FORMULA DE NEWTON-LEIBNIZ

Supongamos que en la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

el límite inferior a está fijado, mientras que el superior b varía. Es evidente que variará también el valor de la integral, es decir, la integral será una función de su límite superior.

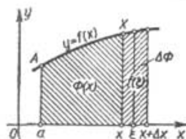


Fig. 216

Para utilizar las designaciones habituales, designemos el límite superior por x y para evitar toda confusión designemos la variable de integración por t (el valor de la integral no depende de la designación de la variable de integración). Obtenemos la integral $\int_a^x f(t)\,dt$. Siendo a constante, la integral será una función de su límite superior x. Designemos esta función por $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Si $f(t)$ es una función no negativa, el valor de $\Phi(x)$ será numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo $aAXx$ (fig. 216). Evidentemente, este área varía en función del cambio de x. Hallemos la derivada de $\Phi(x)$ respecto a x, es decir, la derivada de la integral definida (1) respecto a su límite superior.

Teorema 1. *Si $f(x)$ es una función continua y $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, se verifica la igualdad*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

En otras palabras, *la derivada de una integral definida respecto a su límite superior es igual al integrando en el que la variable de integración está sustituida por el valor del límite superior* (a condición de que el integrando sea continuo).

Demostración. Demos al argumento x un incremento arbitrario Δx, positivo o negativo; entonces, tomando en consideración la propiedad 6 de la integral definida, obtenemos.

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

El incremento de la función $\Phi(x)$ es igual a

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt,$$

es decir,

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Apliquemos a esta integral el teorema de la media (propiedad 5 de la integral definida):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\,\Delta x,$$

donde ξ se halla comprendido entre x y $x+\Delta x$.

Hallemos la razón del incremento de la función al incremento del argumento:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Por tanto,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

Pero, puesto que $\xi \to x$ cuando $\Delta x \to 0$, entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

y, como la función $f(x)$ es continua:

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Así pues, $\Phi'(x) = f(x)$. El teorema está demostrado. El teorema dado se ilustra geométricamente de manera muy simple (fig. 216): el incremento $\Delta\Phi = f(\xi)\,\Delta x$ es igual al área del trapecio curvilíneo de base Δx; y la derivada $\Phi'(x) = f(x)$ es igual a la longitud del segmento xX.

Observación. Del teorema demostrado se deduce, en particular, que *cada función continua tiene una función primitiva.* En efecto, si la función $f(t)$ es continua en el segmento $[a, x]$ entonces, según lo indicado en el § 2, cap. XI, existe la integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$, es decir, existe la función

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

que es, en virtud de lo demostrado, la función primitiva de $f(x)$.

Teorema 2. *Si $F(x)$ es una función primitiva de la función continua $f(x)$, la fórmula*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

es válida.

Esta fórmula se llama *fórmula de Newton-Leibniz*).*

Demostración. Sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$. Según el teorema (1), la función $\int_a^x f(t)\,dt$ es también primitiva de $f(x)$. Pero dos primitivas arbitrarias de la función dada se diferencian por un sumando constante C^*
Por tanto, se puede escribir:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C^*. \tag{3}$$

*) Notemos que tal denominación de la formula (2) es convencional, puesto que ni Newton ni Leibniz dieron exactamente esta fórmula. Pero lo importante es que precisamente ellos establecieron por primera vez la relación entre la integración y la derivación, que permitió enunciar una regla de cálculo de las integrales definidas.

Con la elección correspondiente de C^*, esta igualdad es válida para todos los valores de x, o sea, es una identidad. Para determinar la constante C^* hagamos $x = a$; entonces:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C^*,$$

ó

$$0 = F(a) + C^*,$$

de donde:

$$C^* = -F(a).$$

Por consiguiente,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Haciendo $x = b$, obtenemos la fórmula de Newton — Leibniz:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

o, al sustituir la variable de integración por x:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notemos que la diferencia $F(b) - F(a)$ no depende de la elección de la función primitiva F, puesto que todas las primitivas se diferencian en una magnitud constante, la que desaparece durante la sustracción.

Si introducimos la designación*).

$$F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b,$$

se puede escribir la fórmula (2) en la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a).$$

---

*) La expresión $\Big|_a^b$ se llama símbolo de la sustitución doble. En los manuales de matemáticas se utilizan dos formas equivalentes de notación:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

ó

$$F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b.$$

En adelante utilizaremos ambas formas de notación.

La fórmula de Newton-Leibniz propone un método muy práctico para el cálculo de integrales definidas cuando se conoce la función primitiva del integrando. Exactamente, el descubrimiento de esta fórmula le dio a la integral definida la importancia que ésta tiene hoy día en las matemáticas.

Aunque las operaciones análogas al cálculo de la integral definida como límite de una suma integral, fueron conocidas incluso en la antigüedad (Arquímedes), las aplicaciones de este método se limitaban sólo a los casos más simples, cuando el límite de la suma integral podía ser calculado directamente.

La fórmula de Newton-Leibniz amplió considerablemente el campo de aplicación de la integral definida, puesto que los matemáticos obtuvieron un método general que permite solucionar diferentes problemas particulares. Esta fórmula amplió también la esfera de las aplicaciones de la integral definida en la técnica, mecánica, astronomía, etc.

Ejemplo 1. $\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Ejemplo 2. $\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}$.

Ejemplo 3. $\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)$.

Ejemplo 4. $\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$.

Ejemplo 5. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$.

Ejemplo 6. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

§ 5. SUSTITUCION DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema. *Supongamos que está dada la integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

donde la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$.

Introduzcamos una nueva variable t, por la fórmula:

$$x = \varphi(t).$$

Si

1) $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(\beta) = b$,
2) $\varphi(t)$ y $\varphi'(t)$ *son continuas en el segmento* $[\alpha, \beta]$,
3) $f[\varphi(t)$ *está definida y es continua en el segmento* $[\alpha, \beta]$, *entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \quad (1)$$

Demostración. Si $F(x)$ es función primitiva de $f(x)$, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (3)$$

La validez de la última igualdad se comprueba mediante la derivación de ambos miembros respecto a t (esta igualdad también se deduce de la fórmula (2) § 4, cap. X). De la igualdad (2) tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

De la igualdad (3):

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]\big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Los segundos miembros de las últimas expresiones son iguales, por tanto son iguales los primeros.

Observación. Notemos que al calcular la integral definida por la fórmula (1), no regresamos a la variable original. Si calculamos

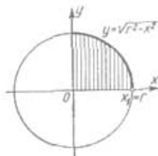


Fig. 217

la segunda integral definida de la igualdad (1), obtenemos un cierto número, la primera integral es igual a este número, es decir, los valores numéricos de dos integrales de la igualdad (1) son iguales.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Solución. Efectuemos la sustitución de variable:

$$x=r\operatorname{sen} t,\quad dx=r\cos t\,dt.$$

Determinemos los nuevos límites:

$$x=0 \text{ para } t=0$$
$$x=r \text{ para } t=\frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\operatorname{sen}^2 t}\, r\cos t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}.$$

Desde el punto de vista geométrico, la integral calculada es el área de una cuarta parte del círculo limitado por una circunferencia $x^2+y^2=r^2$ (fig. 217).

§ 6. INTEGRACION POR PARTES

Supongamos que u y v son funciones derivables de x. Entonces:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Integrando ambos miembros de la identidad entre los límites a y b obtenemos:

$$\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx. \qquad (1)$$

Puesto que $\int (u\,v)'\,dx=uv+C$, entonces: $\int_a^b (uv)'\,dx=uv|_a^b$; por esto la igualdad (1) puede ser escrita en la forma:

$$uv|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$$

o, en definitiva: $\int_a^b u\,dv=uv|_a^b-\int_a^b v\,du.$

Ejemplo. Calcular la integral

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx.$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\operatorname{sen}^{n-1} x}_{u}\, \underbrace{d \cos x}_{dv} =$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \cos x\, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, (1-\operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx.$$

En las designaciones elegidas se puede escribir la última igualdad en la forma:

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

de donde

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \qquad (2)$$

Usando el mismo procedimiento, encontramos:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

por esto:

$$I_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Continuando de la misma manera llegamos a obtener I_0 ó I_1 según sea par o impar el número n.

Examinemos dos casos:

1) n es par, $n = 2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0;$$

2) n es impar, $n = 2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

pero, puesto que

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx=1,$$

entonces:

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

De estas fórmulas se deduce la fórmula de Wallis que expresa el número $\frac{\pi}{2}$ en forma de producto infinito.

En efecto, de las últimas dos igualdades, dividiéndolas término a término; encontramos:

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2m}{3\cdot5\ldots(2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\,\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}. \tag{3}$$

Demostremos ahora que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1.$$

Para todo x del intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ se verifican las desigualdades

$$\operatorname{sen}^{2m-1} x>\operatorname{sen}^{2m} x>\operatorname{sen}^{2m+1} x.$$

Integrando desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, obtenemos:

$$I_{2m-1}\geqslant I_{2m}\geqslant I_{2m+1},$$

de donde:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}\geqslant\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}\geqslant1. \tag{4}$$

De la igualdad (2) se deduce:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\frac{2m+1}{2m}.$$

Por tanto,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}=1.$$

De la desigualdad (4) obtenemos:

$$\lim\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1.$$

Pasando al límite en la fórmula (3), obtenemos la *fórmula de Wallis*:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{3\cdot 5\ldots(2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\right].$$

Se puede escribir esta fórmula en la forma:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\right).$$

§ 7. INTEGRALES IMPROPIAS

1. Integrales con límites infinitos. Sea $f(x)$ una función definida y continua para todos los valores de x tales que $a \leqslant x < +\infty$. Examinemos la integral

$$I(b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta integral tiene significado, para cualquier $b > a$. Cuando b varía, la integral varía también, por esto la integral es una función

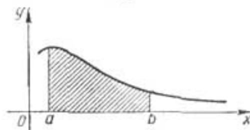


Fig. 218

continua de b (véase § 4). Examinemos cómo varía la integral cuando $b\to+\infty$ (fig. 218).

Definición. Si existe el límite finito

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

este límite se llama *integral impropia* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, +\infty]$ y se designa por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Por tanto, según la definición tenemos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En este caso suele decirse que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

existe o *converge*. Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, para $b \to +\infty$, no tiene límite definito, se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *no existe* o *diverge*.

Es fácil definir el significado geométrico de la integral impropia para $f(x) \geqslant 0$: si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de un

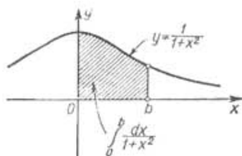


Fig. 219

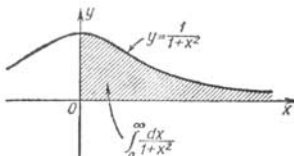


Fig. 220

dominio limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas $x = a$, $x = b$, es natural considerar que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ expresa el área de un dominio ilimitado (infinito), comprendido entre las líneas $y = f(x)$, $x = a$ y el eje de abscisas.

De modo análogo se determinan las integrales impropias en otros intervalos infinitos:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

La última igualdad, se comprende así: si existe cada una de las integrales impropias del segundo miembro, entonces existe (converge), según la definición, la integral del primer miembro.

Ejemplo 1. Calcular la integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (véase figs. 219 y 220).

Solución. Según la definición de integral impropia hallamos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

La integral estudiada representa el área de un trapecio curvilíneo infinito. El área está rayada en la figura 220.

Ejemplo 2. Hallar los valores de α (fig. 221), para los cuales la integral $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ converge o diverge.

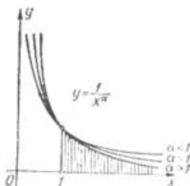


Fig. 221

Solución. Puesto que (para $\alpha \neq 1$)

$$\int_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{1}^{b} = \frac{1}{1-\alpha} [b^{1-\alpha} - 1],$$

tenemos:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$

Por tanto,

si $\alpha > 1$, tenemos $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}$, es decir, la integral converge;

si $\alpha < 1$, tenemos $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \infty$, es decir, la integral diverge;

si $\alpha = 1$, tenemos $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{1}^{+\infty} = \infty$, es decir, la integral diverge.

Ejemplo 3. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solución.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

La segunda integral es igual a $\frac{\pi}{2}$ (véase el ejemplo 1). Calculemos la primera integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

En muchos casos es suficiente establecer si la integral dada converge o diverge, y determinar su valor. En tales circunstancias pueden ser útiles dos teoremas siguientes, que citamos aquí sin demostración. Demos, algunos ejemplos de su aplicación.

Teorema 1. *Si para todos x ($x \geqslant a$) se verifica la desigualdad*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

siendo $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, convergente, entonces $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ también es convergente y

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Ejemplo 4. Analizar la convergencia de la integral

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Solución. Notemos que para $1 \leqslant x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

Luego,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty} = 1,$$

por tanto,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

converge y su valor es inferior a la 1.

Teorema 2. *Si para todos x ($x \geqslant a$) se verifica la desigualdad $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, siendo $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ divergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es divergente.*

Ejemplo 5. Analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

Notemos que

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Pero,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^b = +\infty.$$

Por tanto, la integral dada es divergente.

En los dos últimos teoremas estudiamos las integrales impropias de las funciones no negativas. Para el caso de una función $f(x)$ que cambia de signo en un intervalo infinito, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 3. *Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también converge.* En este caso la última integral se llama *absolutamente convergente.*

Ejemplo 6. Analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx.$$

Solución. Aquí el integrando es una función de signo variable. Notemos que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\right|.$$

Pero, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$

Por tanto, la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| dx$ es convergente, de lo que se deduce que es convergente también la integral dada.

2. Integral de una función discontinua. Sea $f(x)$ una función definida y continua para $a \leqslant x < c$. Pero en el punto $x = c$ la

función, o bien, no está definida, o bien es discontinua. En este caso no se puede definir la integral $\int_a^c f(x)\,dx$ como límite de sumas integrales, *puesto que la función* $f(x)$ *no es continua en el segmento* $[a, c]$ y este límite puede no existir.

La integral $\int_a^c f(x)\,dx$ de la función $f(x)$, discontinua en el punto c, se determina del modo siguiente:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta integral se llama integral impropia *convergente* si existe el límite del segundo miembro de la igualdad y se llama *divergente* en el caso contrario.

Si la función $f(x)$ es discontinua en el extremo izquierdo del segmento $[a, c]$ (es decir, cuando $x = a$), entonces, según la definición:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si la función $f(x)$ es discontinua en un punto $x = x_0$, dentro del segmento $[a, c]$, entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx,$$

si existen ambas integrales impropias del segundo miembro.

Ejemplo 7. Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solución.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to 1-0} 2[\sqrt{1-b}-1] = 2.$$

Ejemplo 8. Calcular la integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solución. Como dentro del segmento de integración existe un punto $x=0$, en el que el integrando es discontinuo, la integral debe ser repre-

sentada como la suma de dos términos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Calculemos por separado cada límite:

$$\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty.$$

Por tanto, en el intervalo $[-1, 0]$ la integral diverge

$$\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty.$$

Entonces en el intervalo $[0, 1]$ la integral también diverge.

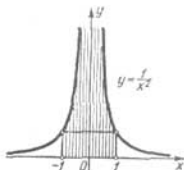


Fig. 222

Así, la integral dada diverge en todo el segmento $[-1, 1]$. Notemos que, si hubiéramos calculado la integral dada, sin tener en cuenta la discontinuidad del integrando en el punto $x = 0$, habríamos obtenido un resultado erróneo. En efecto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

lo que es imposible (fig. 222).

Observación. Si la función $f(x)$, definida en el segmento $[a, b]$, tiene dentro de este segmento un número finito de puntos de discontinuidad: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ se determina del modo siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx,$$

si cada una de las integrales impropias del segundo miembro converge. Si por lo menos una de las integrales diverge, entonces, $\int_a^b f(x)\,dx$ es también divergente.

Para determinar la convergencia de integrales impropias de las funciones discontinuas y calcular sus valores se pueden aplicar frecuentemente teoremas análogos a los teoremas de las integrales con límites infinitos.

Teorema I'. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del segmento $[a, c]$, mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades*

$$\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0,$$

y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^c f(x)\,dx$ es también convergente.

Teorema II'. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del segmento $[a, c]$, mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades $f(x) \geqslant \varphi(x) \geqslant 0$ y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^c f(x)\,dx$ es también divergente.*

Teorema III'. *Si $f(x)$ es una función de signo variable en el segmento $[a, c]$ y discontinua sólo en el punto c, mientras que la integral impropia $\int_a^c |f(x)|\,dx$ del valor absoluto de esta función es convergente, entonces la integral $\int_a^c f(x)\,dx$ de la misma función $f(x)$ es también convergente.*

A menudo se toma $\frac{1}{(c-x)^{\alpha}}$ como funciones de comparación, cómodas para comparar con las funciones que se encuentran bajo el signo de la integral impropia. Es fácil comprobar que $\int_a^c \frac{1}{a(c-x)^{\alpha}}\,dx$ converge para $\alpha < 1$ y diverge para $\alpha \geqslant 1$.

Lo mismo sucede con las integrales $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx$.

Ejemplo 9. ¿Es convergente la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx?$$

Solución. El integrando es discontinuo en el extremo izquierdo del segmento [0, 1]. Comparándolo con la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$, tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}<\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ existe. Por consiguiente, la integral impropia de la menor función, es decir, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$, también existe.

§ 8. CALCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

En la parte final del capítulo X hemos indicado que no toda función continua tiene una primitiva expresada mediante funciones elementales. En estos casos el cálculo de las integrales definidas por la aplicación de la fórmula de Newton-Leibniz es difícil por lo que se utilizan otros métodos para un cálculo aproximado de las integrales definidas.

Expongamos algunos métodos de la integración aproximada, partiendo de la noción de integral definida como límite de una suma.

I. Fórmula de los rectángulos. Sea $y=f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$. Calcular la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dividamos el segmento $[a, b]$ por medio de los puntos $a=x_0$, x_1, x_2, . . ., $x_n=b$ en n partes iguales de longitud Δx:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Designemos por $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ los valores de la función $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir,

$$y_0=f(x_0);\ y_1=f(x_1);\ \ldots;\ y_n=f(x_n).$$

Formemos las sumas:

$$y_0\Delta x+y_1\Delta x+\ldots+y_{n-1}\Delta x,$$
$$y_1\Delta x+y_2\Delta x+\ldots+y_n\Delta x.$$

Cada una de estas sumas es una suma integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, y por eso, expresa aproximadamente la

integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \qquad (1')$$

Estas son las *fórmulas de los rectángulos*. De la figura 223 se deduce que, si $f(x)$ es una función positiva y creciente, la fórmula (1) representa el área de una figura escalonada, compuesta por los

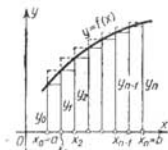


Fig. 223

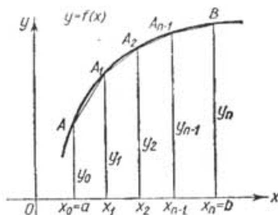


Fig. 224

rectángulos «interiores», y la fórmula (1′), el área de la figura escalonada, compuesta por los rectángulos «exteriores».

El error que se comete durante el cálculo de la integral por la fórmula de los rectángulos es tanto menor cuanto mayor sea el número n $\left(\text{es decir, cuanto menor sea el paso de la división } x = \frac{b-a}{n}\right)$.

II. Fórmula de los trapecios. Es natural esperar un valor más exacto de la integral definida, si cambiamos la curva dada $y = f(x)$ no por una línea escalonada que utilizamos para la fórmula de los rectángulos, sino por una línea quebrada inscrita (fig. 224).

En este caso, en vez del área del trapecio curvilíneo $aABb$ obtenemos la suma de las áreas de los trapecios rectangulares limitados por arriba por las cuerdas AA_1, A_1A_2, . . ., $A_{n-1}B$. Como las áreas de estos trapecios son respectivamente iguales a $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$,

etc, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\ \dots\ +\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right),$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ \dots\ +y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Esta es la *fórmula de los trapecios.*

El número n se elige arbitrariamente. Cuanto mayor sea este número n y, por tanto, cuanto menor sea el paso $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, con tanta mayor precisión la suma del segundo miembro de la igualdad aproximada (2) expresará el valor de la integral.

III. Fórmula de las parábolas (Fórmula de Simpson). Dividamos el segmento $[a, b]$ en un número par $n=2m$ de partes iguales. El área del trapecio curvilíneo correspondiente a los dos primeros segmentos,

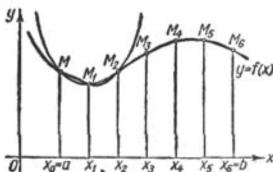


Fig. 225

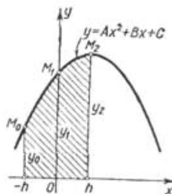


Fig. 226

$[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$ y limitado en su parte superior por la curva dada $y=f(x)$, se sustituye por el área de otro trapecio curvilíneo limitado por una **parábola de segundo grado** que pasa por los tres puntos:

$$M\,(x_0,\ y_0);\ M_1\,(x_1,\ y_1);\ M_2\,(x_2,\ y_2)$$

y tiene el eje paralelo al eje Oy (fig. 225). Tal trapecio curvilíneo es un trapecio *parabólico*.

La ecuación de una parábola con el eje paralelo a Oy es

$$y=Ax^2+Bx+C.$$

Los coeficientes A, B, y C se determinan unívocamente de la condición de que la parábola pase por los tres puntos dados. Construi-

mos también parábolas semejantes para otras pares de los segmentos. La suma de las áreas de los trapecios parabólicos da el valor aproximado de la integral.

Calculemos al principio el área de un trapecio parabólico.

Lema. *Si el trapecio curvilíneo está limitado por una parábola*

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

el eje Ox y dos ordenadas, la distancia entre las cuales es igual a $2h$, entonces su área es igual a

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{3}$$

donde, y_0 e y_2 son ordenadas de los extremos e y_1 es ordenada de la curva en el punto medio del segmento.

Demostración. Dispongamos el sistema de coordenadas auxiliar del modo como se indica en la figura 226. Los coeficientes en la ecuación de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ se determinan de las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{si } x_0 = -h, \text{ entonces:} & y_0 = Ah^2 - Bh + C; \\ \text{si } x_1 = 0, \text{ entonces:} & y_1 = C; \\ \text{si } x_2 = h, \text{ entonces:} & y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Considerando que los coeficientes A, B, C son conocidos, determinemos el área del trapecio parabólico mediante la integral definida:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Pero, de las ecuaciones (4) se deduce que

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Por consiguiente,

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

lo que se trataba de demostrar.

Regresemos a nuestro problema principal (véase fig. 225). Utilizando la fórmula (3) podemos escribir las siguientes igualdades apro-

ximadas ($h = \Delta x$):

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos a la izquierda la integral buscada, y a la derecha, su valor aproximado:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots$$
$$\ldots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \qquad (5)$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) +$$
$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})].$$

La última es la *fórmula de Simpson*. Aquí el número $2m$ de los puntos de división es arbitrario; pero cuanto mayor sea este número tanto mayor es la precisión con la que la suma del segundo miembro de la igualdad (5) expresa el valor de la integral *).

Ejemplo. Calcular aproximadamente:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Solución. Dividamos el segmento [1, 2] en 10 partes iguales (fig. 227). Haciendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1,$$

*) Para determinar el número de puntos de división que se deben tomar para calcular la integral con un grado de precisión dado, se pueden utilizar las fórmulas de evaluación de los errores cometidos durante el cálculo aproximado de la integral. Aquí no se dan estas fórmulas de evaluación.

formamos la tabla de los valores del integrando:

x	$y=\frac{1}{x}$	x	$y=\frac{1}{x}$
$x_0=1,0$	$y_0=1,00000$	$x_6=1,6$	$y_6=0,62500$
$x_1=1,1$	$y_1=0,90909$	$x_7=1,7$	$y_7=0,58824$
$x_2=1,2$	$y_2=0,83333$	$x_8=1,8$	$y_8=0,55556$
$x_3=1,3$	$y_3=0,76923$	$x_9=1,9$	$y_9=0,52632$
$x_4=1,4$	$y_4=0,71429$	$x_{10}=2,0$	$y_{10}=0,50000$
$x_5=1,5$	$y_5=0,66667$		

I. Según la primera fórmula de los rectángulos (1) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_0+y_1+\ldots+y_9)=0,1\cdot 7,18773=0,71877.$$

Según la segunda fórmula de los rectángulos (1′) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_1+y_2+\ldots+y_{10})=0,1\cdot 6,68773=0,66877.$$

Directamente de la figura 227 se deduce que en el caso dado la primera fórmula da el valor de la integral por exceso y la segunda, por defecto.

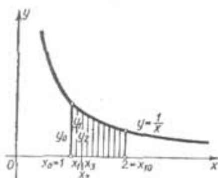


Fig. 227

II. Según la fórmula de los trapecios (2) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+6,18773\right)=0,69377.$$

III. Según la fórmula de Simpson tenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}\,[y_0+y_{10}+2\,(y_2+y_4+y_6+y_8)+4\,(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]=$$

$$=\frac{0,1}{3}\,(1+0,5+2\cdot 2,72818+4\cdot 3,45955)=0,69315.$$

En realidad $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6931472$ (con precisión de hasta el séptimo dígito decimal).

Por consiguiente: al dividir el segmento [0, 1] en 10 partes iguales obtenemos:

— según la fórmula de Simpson, cinco dígitos correctos,
— según la fórmula de los trapecios, solamente tres dígitos correctos,
— según la fórmula de los rectángulos, podemos estar seguros de que solamente el primer dígito es correcto.

§ 9. FORMULA DE CHEBISHEV

En los cálculos técnicos se utiliza frecuentemente la fórmula de integración aproximada de Chébishev. Supongamos que es preciso calcular

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sustituyamos el integrando por el polinomio de interpolación de Lagrange $P(x)$ (§ 9, cap. VII), tomando en el segmento $[a, b]$ n valores de la función: $f(x_1)$, $f(x_2)$, . . ., $f(x_n)$, donde x_1, x_2, ..., x_n son los puntos arbitrarios del segmento $[a, b]$:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) +$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} f(x_2) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n). \qquad (1)$$

Obtenemos la siguiente fórmula aproximada de integración:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx, \qquad (2)$$

la que después de algunos cálculos toma la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n), \qquad (3)$$

donde los coeficientes C_i se calculan por las fórmulas:

$$C_i = \int_a^b \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} dx. \quad (4)$$

La fórmula (3) es complicada e incómoda para los cálculos, puesto que los coeficientes C_i se expresan mediante fracciones complejas.

Chébishev planteó el problema inverso: dados en vez de las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, determinar las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Los coeficientes C_i se dan de modo que la fórmula (3) sea la más simple posible para los cálculos. Es evidente que esto se logra cuando todos los coeficientes C_i son iguales entre sí:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n.$$

Designemos por C_n el valor común de los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, entonces la fórmula (3) toma la forma:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx C_n [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]. \quad (5)$$

La fórmula (5) representa en general una igualdad **aproximada**, pero si $f(x)$ es un polinomio de grado no superior a $(n - 1)$ obtenemos entonces una igualdad **exacta**. Esta circunstancia permite determinar las magnitudes $C_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para obtener una fórmula cómoda para todo intervalo de integración, transformemos el segmento de integración $[a, b]$ en el segmento $[-1, 1]$. Para esto hagamos

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t;$$

entonces para $t = -1$; $x = a$;

para $t = 1$, $x = b$.

Por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, dt,$$

donde por $\varphi(t)$ está designada la función de t, que se halla bajo el signo de la integral. Así, la integración de una función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ siempre puede ser reducida a la integración de alguna otra función $\varphi(x)$ en el segmento $[-1, 1]$.

El problema se ha reducido a la elección de los números C_n, x_1, x_2, . . ., x_n, en la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \tag{6}$$

de modo que esta fórmula sea exacta para cualquier función $f(x)$ de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{7}$$

Notemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_4}{5} + \dfrac{a_6}{7} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{n}\right), & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{n-1}\right), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \tag{8}$$

Por otra parte, la suma del segundo miembro de la igualdad (6), en virtud de (7), es igual a

$$C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})]. \tag{9}$$

Igualando las expresiones (8) y (9), obtenemos la igualdad que debe ser válida para cualesquiera a_0, a_1, a_2, . . ., a_{n-1}.

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right) =$$

$$= C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})].$$

Igualando los coeficientes de $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ en los dos miembros de la igualdad, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2 = C_n n \quad \text{o} \quad C_n &= \frac{2}{n}; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 &= \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}; \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 &= 0; \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 &= \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Hallamos las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las últimas n ecuaciones. Chébishev encontró estas soluciones para diferentes valores de n.

Número de ordenadas n	Coeficiente C_n	Valores de abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0{,}707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0{,}794654$ $x_2 = -x_3 = 0{,}187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0{,}832498$ $x_2 = -x_4 = 0{,}374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0{,}866247$ $x_2 = -x_5 = 0{,}422519$ $x_3 = -x_4 = 0{,}266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0{,}883862$ $x_2 = -x_6 = 0{,}529657$ $x_3 = -x_5 = 0{,}323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0{,}911589$ $x_2 = -x_8 = 0{,}601019$ $x_3 = -x_7 = 0{,}528762$ $x_4 = -x_6 = 0{,}167906$ $x_5 = 0$

Abajo se dan las soluciones halladas por él para los casos en que el número n de puntos intermedios es igual a 3, 4, 5, 6, 7, 9.

Por consiguiente, el cálculo aproximado de la integral en el segmento $[-1, 1]$ se efectúa según la siguiente *fórmula de Chébishev*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)],$$

donde, n es uno de los números 3, 4, 5, 6, 7 ó 9, y $x_1, \ldots, x_n$, números representados en la tabla. No se puede tomar por n el número 8 u otros números superiores a 9, puesto que en este caso el sistema de ecuaciones (10) da las raíces imaginarias. Cuando los límites de integración de la integral dada son a y b, la fórmula de Chébishev toma la forma:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)],$$

donde $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, y los x_i tienen los valores indicados en la tabla.

Demos un ejemplo de cálculo de una integral con ayuda de la fórmula de Chébishev.

Ejemplo. Calcular $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} (= \ln 2)$.

Solución. Mediante la sustitución de variables, transformemos esta integral en otra que tiene -1 y 1 como *límites de integración.*

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$dx = \frac{dt}{2}.$$

Entonces,

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}.$$

Aplicando la fórmula de Chébishev calculemos la última integral, haciendo $n = 3$:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{2}{3}[f(0{,}707107) + f(0) + f(-0{,}707107)].$$

Puesto que

$$f(0,707107)=\frac{1}{3+0,707107}=\frac{1}{3,707107}=0,269752,$$

$$f(0)=\frac{1}{3+0}=0,333333,$$

$$f(-0,707107)=\frac{1}{3-0,707107}=\frac{1}{2,292893}=0,436130,$$

entonces:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{3+t}=\frac{2}{3}(0,269752+0,333333+0,436130)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 1,039215=0,692810\approx 0,693.$$

Comparando este resultado con los resultados obtenidos según la fórmula de los rectángulos, de los trapecios y la de Simpson (véase el ejemplo del párrafo anterior), notamos que el resultado obtenido mediante la fórmula de Chébishev (con tres puntos intermedios) es más preciso y está más cerca del valor real de la integral que el resultado obtenido según la fórmula de los trapecios (con nueve puntos intermedios).

La teoría del cálculo aproximado de las integrales está desarrollada en las obras del académico A. N. Krilov (1863-1945).

§ 10. INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

Derivación de las integrales dependientes de un parámetro.

Sea la integral

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx, \tag{1}$$

en la que el integrando depende de un cierto parámetro α. Si el parámetro α varía, el valor de la integral definida variará también. Así, la integral definida es una función de α; por esto podemos designarla por $I(\alpha)$.

1. Supongamos que $f(x,\ \alpha)$ y $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ son funciones continuas en las que

$$c\leqslant\alpha\leqslant d \text{ y } a\leqslant x\leqslant b. \tag{2}$$

Hallemos la derivada de la integral respecto al parámetro α:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha).$$

Para hallar esta derivada notemos

$$I(\alpha+\Delta\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

y, por tanto,

$$I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^b [f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)]\,dx;$$

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx.$$

Aplicando el teorema de Lagrange al integrando, tenemos:

$$\frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\,\Delta\alpha),$$

donde $0<\theta<1$.

Puesto que $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ es continua en el dominio cerrado (2), entonces:

$$f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\,\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon,$$

donde la magnitud ε que depende de x, α, $\Delta\alpha$, tiende a cero, cuando $\Delta\alpha\to 0$.

De tal modo:

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b [f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon]\,dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx+\int_a^b \varepsilon\,dx.$$

Pasando al límite para $\Delta\alpha\to 0$, obtenemos *):

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx$$

o

$$\left[\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx.$$

La última fórmula se llama *fórmula de Leibniz.*

---

*) El integrando en la integral $\int_a^b \varepsilon d\alpha$ tiende a cero para $\Delta\alpha\to 0$. Del hecho de que el integrando tiende a cero en cada punto, no siempre se deduce que la integral también tiende a cero. Sin embargo, en el caso dado, $\int_a^b \varepsilon dx$ tiende a cero para $\Delta\alpha\to 0$, lo que admitimos aquí sin demostración.

2. **Supongamos ahora que en la integral (1) los límites de integración a y b son funciones de α:**

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\ \alpha)\,dx. \tag{1'}$$

$\Phi[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)]$ es una función compleja de α, siendo a y b los argumentos intermedios. Para hallar la derivada de $I(\alpha)$, apliquemos la regla de derivación de una función compleja de varias variables (véase § 10, cap. VIII):

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \tag{3}$$

En virtud del teorema sobre la derivación de una integral definida respecto a su límite superior variable (véase la fórmula (1) § 4), obtenemos:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=f[b(\alpha),\ \alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=-\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\ \alpha)\,dx=-f[a(\alpha),\ \alpha].$$

Finalmente para calcular $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ apliquemos la fórmula de Leibniz, obtenida anteriormente:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx.$$

Introduciendo en la fórmula (3) las expresiones obtenidas de las derivadas, tenemos:

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx+f[b(\alpha),\ \alpha]\frac{db}{d\alpha}-f[a(\alpha),\ \alpha]\frac{da}{d\alpha}. \tag{4}$$

La fórmula de Leibniz permite calcular ciertas integrales definidas.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

Solución. Notemos, que no se puede calcular directamente esta integral, puesto que la primitiva de la función $e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}$ no se expresa mediante funciones elementales. Para calcular esta integral, considerémosla como función de un parámetro α:

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

Entonces, su derivada respecto a α se halla según la fórmula de Leibniz*):

$$I'(\alpha)=\int_0^{\infty}\left[e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\right]'_{\alpha}dx=\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\alpha x\,dx.$$

La última integral se calcula fácilmente con ayuda de las funciones elementales y es igual a $\frac{1}{1+\alpha^2}$. Por eso

$$I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Integrando la identidad obtenida, hallamos $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha+C. \tag{5}$$

Ahora falta determinar C. Para esto notemos que

$$I(0)=\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\operatorname{sen}0x}{x}\,dx=\int_0^{\infty}0\,dx=0.$$

Además, $\operatorname{arctg}0=0$.
Poniendo en la igualdad (5) $\alpha=0$, obtenemos:

$$I(0)=\operatorname{arctg}0+C,$$

de donde $C=0$. Por consiguiente, para todo valor de α se verifica la igualdad

$$I(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha,$$

es decir,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\alpha.$$

---

*) La fórmula de Leibniz se ha obtenido en la suposición de que los límites de integración a y b son finitos. En este caso la fórmula de Leibniz también es válida, aunque uno de los límites de integración es infinito.

§ 11. INTEGRACION DE UNA FUNCION COMPLEJA DE UNA VARIABLE REAL

En el § 4, cap. VII, hemos determinado una función compleja de la variable real x:

$$\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x) \tag{1}$$

y su derivada:

$$\tilde{f}'(x) = u'(x) + iv'(x). \tag{2}$$

Definición. La función $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ se llama primitiva de una función compleja de la variable real x, si

$$\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x), \tag{3}$$

es decir, si:

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x) \tag{4}$$

De la igualdad (4) se deduce:

$$U'(x) = u(x)$$
$$V'(x) = v(x),$$

es decir, $U(x)$ es la primitiva para $u(x)$, y $V(x)$ es la primitiva para $v(x)$.

De la definición y la última observación se deduce que, si $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ es la primitiva para $\tilde{f}(x)$, entonces la primitiva cualquiera para $\tilde{f}(x)$ tiene la forma $\tilde{F}(x) + C$, donde C es una constante compleja arbitraria.

La expresión $\tilde{F}(x) + C$ se llama integral definida de una función compleja de la variable real y se escribe:

$$\int \tilde{f}(x)\,dx = \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx = \tilde{F}(x) + C. \tag{5}$$

La integral definida de una función compleja de la variable real se determina del modo siguiente:

$$\text{si } \tilde{f}(x) = u(x) + iv(x),$$

entonces:

$$\int_a^t \tilde{f}(x)\,dx = \int_a^t u(x)\,dx + i\int_a^t v(x)\,dx. \tag{6}$$

Esta definición no contradice, sino que concuerda con la definición de la integral definida como límite de una suma.

Ejercicios para el capítulo XI

1. Calcular las integrales definidas, considerándolas como límites de la suma integral s_n.

$\int_a^b x^2\,dx.$

Indicación: Divídase el segmento $[a, b]$ en n partes mediante los puntos $x_i = aq^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, donde $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. *Respuesta:* $\frac{b^3 - a^3}{3}$. 2. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, donde $0 < a < b$. *Respuesta:* $\ln \frac{b}{a}$.

Indicación. Dividir el segmento $[a, b]$ como en el ejemplo anterior.

3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$. *Respuesta:* $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$.

Indicación: Véase el ejemplo anterior.

4. $\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx$. *Respuesta:* $\cos a - \cos b$.

Indicación. Establézcase previamente la identidad siguiente: $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) + \ldots + \operatorname{sen}[a+(n-1)h] = \frac{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+nh-\frac{h}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$, para esto es preciso multiplicar y dividir todos los términos del primer miembro por $\operatorname{sen}\frac{h}{2}$ y sustituir el producto de senos por la diferencia de cosenos.

5. $\int_a^b \cos x\,dx$. *Respuesta:* $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$.

Utilizando la fórmula de Newton-Leibniz, calcular las integrales definidas:

6. $\int_0^1 x^4\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}$. 7. $\int_0^1 e^x\,dx$. *Resp.* $e - 1$. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* 1.

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. 10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. 11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$. *Resp.* $\ln 2$. 12. $\int_1^e \frac{dx}{x}$. *Resp.* 1. 13. $\int_1^x \frac{dx}{x}$. *Resp.* $\ln x$. 14. $\int_0^x \operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$.

15. $\int\limits_{\sqrt[3]{a}}^{x} x^2\,dx$. *Resp.* $\frac{x^3-a}{3}$. 16. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$. *Res.* $\ln(2z-1)$. 17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. 18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$.

Calcular los valores de las integrales siguientes, empleando las sustituciones indicadas de variables:

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$, $\cos x = t$. *Resp.* $\frac{1}{3}$. 20. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. *Resp.* $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 21. $\int\limits_{1}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x=t^2$. *Resp.* $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 22. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x=\operatorname{tg} t$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. 23. $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$, $x-1=t^2$. *Resp.* $2(2-\operatorname{arctg} 2)$. 24. $\int\limits_{3}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{z\sqrt{z^2+1}}$, $z=\frac{1}{x}$. *Resp.* $\ln\frac{3}{2}$. 25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6-5\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi}$, $\operatorname{sen}\varphi=t$. *Resp.* $\ln\frac{4}{3}$.

Demostrar que 26. $\int\limits_{0}^{1} x^m(1-x)^n\,dx = \int\limits_{0}^{1} x^n(1-x)^m\,dx$ $(m>0,\ n>0)$.

27. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$. 28. $\int\limits_{0}^{a} f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} f(x^2)\,dx$.

Calcular las integrales impropias siguientes:

29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* 1. 30. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$. *Resp.* 1. 31. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$. 32. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2}$. 33. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^5}$. *Resp.* $\frac{1}{4}$. 34. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$. *Resp.* -1. 35. $\int\limits_{0}^{\infty} x\operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* La integral diverge. 36. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Resp.* La integral diverge. 37. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. *Resp.* π. 38. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. *Resp.* $\frac{3}{2}$. 39. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^3}$.

Resp. La integral diverge. **40.** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2}$. **41.** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$. *Resp.* La integral diverge. **42.** $\int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx\ (a>0)$. *Resp.* $\frac{b}{a^2-b^2}$. **43.** $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx\ (a>0)$. *Resp.* $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Calcular los valores aproximados de las integrales:

44. $\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n=12$). *Respuesta*: 1,6182 (según la fórmula de los trapecios); 1,6098 (según la fórmula de Simpson). **45.** $\int_1^{11} x^3\, dx$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 3690; 3660. **46.** $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx$, según la fórmula de los trapecios ($n=6$). *Respuesta*: 0,8109. **47.** $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$, según la fórmula de Simpson ($n=4$). *Respuesta*: 0,8111. **48.** $\int_1^{10} \log_{10} x\, dx$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 6,0656; 6,0896.

49. Calcular el valor de π, partiendo de la correlación $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aplicando la fórmula de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 3,14159.

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$, según la fórmula de Simpson ($n=10$). *Respuesta*: 1,371.

51. Partiendo de la igualdad $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}$, donde $\alpha > 0$, hallar el valor de la integral $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$, para $n > 0$. *Respuesta*: $n!$

52. Partiendo de la igualdad $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, hallar el valor de la integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. *Respuesta*: $\frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$.

53. Calcular la integral $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx$. *Resp.* $\ln(1+\alpha)$ $(\alpha > -1)$.

54. Utilizando la igualdad $\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$, calcular la integral $\int_0^1 x^{n-1}(\ln x)^k\,dx$. *Resp.*: $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

CAPITULO XII

APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. CALCULO DE AREAS EN COORDENADAS RECTANGULARES

Si la función $f(x) \geqslant 0$ está en el segmento $[a, b]$, entonces, como ya es sabido (§ 2, cap. XI), el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$ y $x = b$ (fig. 210) es igual a:

$$Q = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Si $f(x) \leqslant 0$ en el segmento $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ es también $\leqslant 0$. Su valor absoluto es igual al área Q del trapecio curvilíneo correspondiente:

$$-Q = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Si $f(x)$ cambia de signo un número finito de veces en el segmento $[a, b]$ entonces, podemos descomponer la integral a lo largo de todo

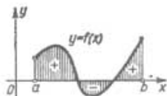


Fig. 228

el segmento $[a, b]$ en la suma de integrales en los segmentos parciales. La integral es positiva en los segmentos donde $f(x) \geqslant 0$, y negaeiva en los segmentos donde $f(x) \leqslant 0$. La integral a lo largo de todo tl segmento representa la diferencia de las áreas dispuestas por arriba y por debajo del eje Ox (fig. 228). Para obtener ordinariamente la suma de las áreas, es preciso hallar la suma de los valores absolutos

de las integrales en los segmentos parciales indicados o calcular la integral:

$$Q=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ejemplo 1. Calcular el área Q, limitada por la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ y el eje Ox, para $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ (fig. 229).

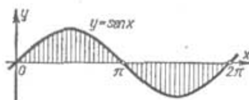


Fig. 229

Solución. Puesto que $\operatorname{sen} x\geqslant 0$ para $0\leqslant x\leqslant\pi$, y $\operatorname{sen} x\leqslant 0$ para $\pi<x\leqslant 2\pi$ entonces:

$$Q=\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx\right|=\int_0^{2\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx,$$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-(\cos 2\pi-\cos\pi)=-2.$$

Por tanto,

$$Q=2+|-2|=4.$$

Si es preciso calcular el área limitada por las curvas $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ y las ordenadas $x=a$, $x=b$, a condición de que $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ obtenemos (fig. 230):

$$Q=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \qquad (2)$$

Ejemplo 2. Calcular el área limitada por las curvas (fig. 231)

$$y=\sqrt{x} \text{ e } y=x^2.$$

Solución. Hallemos los puntos de intersección de las curvas: $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$, de donde: $x_1=0$, $x_2=1$.

Por tanto,

$$Q=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Calculemos ahora el área de un trapecio curvilíneo limitada por la curva dada por ecuaciones paramétricas (fig. 232):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{3}$$

donde:

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \quad \text{y} \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Supongamos que las ecuaciones (3) definen cierta función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y, por tanto, el área del trapecio cur-

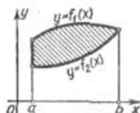


Fig. 230

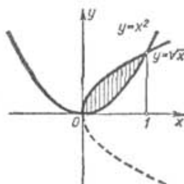


Fig. 231

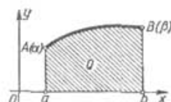


Fig. 232

vilíneo puede ser calculada según la fórmula:

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

Sustituyamos en esta integral la variable: $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)\,dt$. En virtud de las ecuaciones (3) obtenemos: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Por consiguiente,

$$Q = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Esta es la fórmula para calcular el área de un trapecio curvilíneo, limitada por una curva dada en coordenadas paramétricas.

Ejemplo 3. Calcular el área de un campo limitado por la elipse:

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\text{sen}\,t.$$

Solución. *Calculemos el área de la mitad superior de la elipse y dupliquémosla.* La variable x varía desde $-a$ hasta $+a$, por tanto, t varía desde π hasta 0, $Q = 2\int_\pi^0 (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t\,dt) = -2ab\int_\pi^0 \text{sen}^2 t\,dt =$

$$= 2ab\int_0^\pi \text{sen}^2 t\,dt = 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}\,2t}{4}\right]_0^\pi = \pi ab.$$

Ejemplo 4. Calcular el área limitada por el eje Ox y un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Solución. Puesto que t varía desde 0 hasta 2π, x varía desde 0 hasta $2\pi a$. Según la fórmula (4), tenemos:

$$Q=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\left[\int_0^{2\pi}dt-2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right];$$

$$\int_0^{2\pi}dt=2\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0;\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\pi.$$

Finalmente obtenemos

$$Q=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2.$$

§ 2. AREA DE UN SECTOR CURVILINEO EN COORDENADAS POLARES

Sea $\rho=f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, donde $f(\theta)$ es una función continua para $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$.

Determinemos el área del sector OAB, limitada por la curva $\rho=f(\theta)$ y los radios vectores $\theta=\alpha$ y $\theta=\beta$.

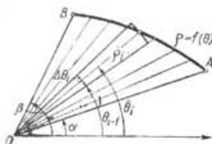


Fig. 233

Dividamos el área dada en n partes mediante los radios vectores $\theta_0=\alpha$, $\theta=\theta_1$, . . ., $\theta_n=\beta$. Designemos por $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, . . ., $\Delta\theta_n$ los ángulos formados por los radios vectores trazados (fig. 233).

Sea $\bar\rho_i$ la longitud de un radio vector correspondiente a un ángulo $\bar\theta_i$ cualquiera, comprendido entre θ_{i-1} y θ_i.

Examinemos el sector circular de radio $\bar\rho_i$ y ángulo central $\Delta\theta_i$. Su área es igual a:

$$\Delta Q_i=\frac{1}{2}\bar\rho_i^2\,\Delta\theta_i.$$

La suma

$$Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^2\,\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\bar{\theta}_i)]^2\,\Delta\theta_i$$

da el área del sector «escalonado». Puesto que la suma indicada es una suma integral para la función $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ en el segmento $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$,

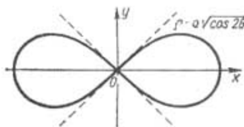


Fig. 234

su límite para máx $\Delta\theta_i \to 0$ es la integral definida

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\,d\theta.$$

Esta integral no depende de un radio vector $\bar{\rho}_i$ elegido dentro del ángulo $\Delta\theta_i$. Es natural, considerar este límite como el área buscada de la figura *).

Así, el área del sector OAB es igual a:

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\,d\theta \qquad (1)$$

ó

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\,d\theta. \qquad (1')$$

Ejemplo. Calcular el área limitada por la lemniscata (fig. 234).

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

*) Se puede demostrar que esta definición del área no contradice a la dada anteriormente: en otras palabras, calculando el área del sector curvilíneo mediante los trapecios curvilíneos, obtenemos el mismo resultado.

Solución. El radio vector describe la cuarta parte del área buscada cuando θ varía desde 0 hasta $\pi/4$:

$$\frac{1}{4}Q=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}\rho^2\,d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_{0}^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\left.\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right|_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{2},$$

por tanto, $Q=a^2$.

§ 3. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

1. Longitud de un arco de curva en coordenadas rectangulares. Sea $y=f(x)$ la ecuación de una curva plana en coordenadas rectangulares.

Encontremos la longitud del arco AB de esta curva, comprendida entre las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ (fig. 235).

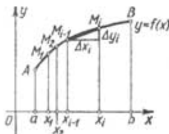


Fig. 235

En el capítulo VI (§ 1) hemos dado la definición de la longitud de un arco. Recordémosla. Tomemos en el arco AB los puntos A, M_1, M_2, . . ., M_i, . . ., B cuyas abscisas son, respectivamente, $x_0=a$, x_1, x_2, . . ., x_i, . . ., $b=x_n$. Tracemos las cuerdas AM_1, M_1M_2, . . ., $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos respectivamente por Δs_1, Δs_2, . . ., Δs_n. Obtenemos una línea quebrada AM_1M_2 . . . . . . $M_{n-1}B$ inscrita en el arco $\widehat{AB}$. La longitud de esta quebrada es igual a

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i.$$

El límite al cual tiende la longitud de la quebrada inscrita, cuando la longitud de su eslabón más grande tiende a cero, se llama *longitud s del arco AB*

$$s=\lim_{\text{máx}\,\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i. \qquad (1)$$

Demostremos, ahora, que si la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, este límite existe. Al mismo tiempo obtenemos el método para calcular la longitud de un arco.

Introduzcamos la designación:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Entonces:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i.$$

Según el teorema de Lagrange tenemos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

donde $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Por consiguiente,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i.$$

De este modo, la longitud de la línea quebrada inscrita es

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i.$$

Según la hipótesis $f'(x)$ es continua, por consiguiente, la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también es continua. Por eso, la suma integral escrita tiene un límite igual a la integral definida:

$$s = \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Así, hemos obtenido la fórmula para calcular la longitud de un arco:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (2)$$

Observación. Partiendo de la última fórmula, se puede obtener la derivada de la longitud del arco respecto a la abscisa. Considerando que el límite superior de integración es variable y designándolo por x (sin cambiar la variable de integración), obtenemos la longitud del arco s en función de x:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Derivando esta integral respecto al límite superior, obtenemos:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3}$$

Hemos obtenido ya esta fórmula en el § 1, cap. VI, partiendo de otras hipótesis.

Ejemplo 1. Hallar la longitud de la circunferencia

$$x^2+y^2=r^2.$$

Solución. Calculemos primero la longitud de la cuarta parte de la circunferencia situada en el primer cuadrante. La ecuación del arco AB es:

$$y=\sqrt{t^2-x^2},\ \text{de donde:}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}.$$

La longitud de toda la circunferencia es $s=2\pi r$.

Hallemos ahora la longitud de un arco de curva, en el caso en que la curva está dada por ecuaciones paramétricas:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \tag{4}$$

donde, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuas que tienen derivadas continuas, sin que $\varphi'(t)$ se anula en el segmento dado.

En este caso, las ecuaciones (4) determinan cierta función $y=f(x)$ continua, que tiene también derivada continua:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Sea $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Realicemos la sustitución en la integral (2)

$$x=\varphi(t),\quad dx=\varphi'(t)\,dt,$$

obtenemos:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)\,dt,$$

o, en definitiva:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{5}$$

Observación 2. Se puede demostrar que la fórmula (5) conserva su validez también para las curvas que son cortadas por rectas verticales en más de un punto (en particular, para las curvas cerradas) a condición de que ambas derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ sean continuas en todos los puntos de la curva.

Ejemplo 2. Calcular la longitud de la hipocicloide (astroide):

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\,\text{sen}^3 t.$$

Solución. Puesto que la curva es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas, calculemos, al principio, la longitud del segmento de esta curva dispuesta en el primer cuadrante. Hallamos:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\,\text{sen}^2 t\cos t.$$

El parámetro t variará desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Por tanto,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + 9a^2\,\text{sen}^4 t\cos^2 t}\,dt = 3a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t\,\text{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,t\cos t\,dt = 3a\left.\frac{\text{sen}^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}; \quad s = 6a.$$

Observación 3. Si tenemos una curva en el espacio, dada por ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{6}$$

donde, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (véase § 1, cap. IX), la longitud de su arco se determina (igual que para un arco plano) como el límite al cual tiende la longitud de la línea quebrada inscrita, cuando la longitud de su eslabón más grande tienda a cero. Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces la curva tiene una longitud determinada (es decir, existe el límite indicado arriba para esta curva) que se calcula según la fórmula:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{7}$$

Admitamos el último resultado sin demostración.

Ejemplo 3. Calcular la longitud del arco de hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = amt$, al variar t desde 0 hasta 2π.

Solución. De las ecuaciones dadas, hallamos:

$$dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt, \quad dz = am\,dt.$$

Poniendo estas expresiones en la fórmula (7), obtenemos:

$$s=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+a^2\cos^2 t+a^2m^2}\,dt=a\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt=2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. La longitud de un arco de curva en coordenadas polares. Sea

$$\rho=f(\theta) \tag{8}$$

la ecuación de una curva dada en coordenadas polares, donde ρ es el radio polar y θ es el ángulo polar.

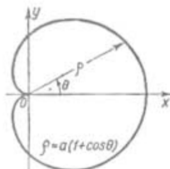


Fig. 236

Escribamos las fórmulas para pasar de coordenadas polares a cartesianas

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Al sustituir ρ por su expresión (8), en función de θ obtenemos las ecuaciones:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la curva y aplicar la fórmula (5) para el cálculo de la longitud del arco.

Hallemos, para esto, las derivadas de x e y respecto al parámetro θ:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\operatorname{sen}\theta;\qquad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\operatorname{sen}\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

Entonces,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2=\rho'^2+\rho^2.$$

Por consiguiente,

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta.$$

Ejemplo 4. Hallar la longitud de la cardioide

$$\rho = a(1+\cos\theta) \text{ (fig. 236)}.$$

Al variar el ángulo θ desde 0 hasta π, obtenemos la mitad de la longitud buscada. Aquí $\rho' = -a \operatorname{sen}\theta$. Por tanto,

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Ejemplo 5. Calcular la longitud de la elipse

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \end{array}\right\} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

suponiendo que $a > b$.

Solución. Para el cálculo utilicemos la fórmula (5). Calculemos al principio la cuarta parte del arco, es decir, la longitud del arco que corresponde al cambio del parámetro desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\, dt = a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\cos^2 t}\, dt,$$

donde, $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$. Por lo tanto,

$$s = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\cos^2 t}\, dt.$$

Ahora nos queda solamente calcular la última integral. Pero como se sabe, esta integral no se expresa mediante las funciones elementales (véase § 16, cap. X) y se puede calcularla únicamente por medio de los métodos aproximados (por ejemplo, según la fórmula de Simpson).

En particular, si el semieje mayor de la elipse es igual a 5, y el semieje menor es igual a 4, entonces, $k = 3/5$; y la longitud de la elipse será $s = 4\cdot 5 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos^2 t}\, dt.$

Calculando la última integral según la fórmula de Simpson (dividiendo el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en cuatro partes), obtenemos el valor aproximado de la integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{5}\cos^2 t}\, dt \approx 1,298,$$

y, por consiguiente, la longitud del arco de toda la elipse es aproximadamente igual a:

$$s = \approx 25,96 \text{ unidades de longitud.}$$

§ 4. CALCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO EN FUNCION DE LAS AREAS DE SECCIONES PARALELAS

Dado un cuerpo T, supongamos que se conoce el área de toda sección arbitraria de este cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox (fig. 237). Este área depende de la posición del plano secante, es decir, es función de x:

$$Q = Q(x).$$

Supongamos que $Q(x)$ es una función continua de x, y determinemos el volumen del cuerpo dado.

Tracemos los planos $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, . . ., $x = x_n = b$.

Estos planos dividen el cuerpo en capas. En cada intervalo parcial $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, elijamos un punto arbitrario ξ_i y para cada valor

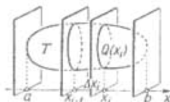


Fig. 237

de $i = 1, 2, \ldots, n$ construyamos un cuerpo cilíndrico cuya generatriz sea paralela al eje Ox, y la directriz represente el contorno de la sección del cuerpo T por el plano $x = \xi_i$.

El volumen de tal cilindro elemental, con el área de la base igual a $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, y la altura Δx_i es igual a $Q(\xi_i)\,\Delta x_i$. El volumen de todos los cilindros es:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x.$$

El límite de esta suma (si este límite existe), cuando máx $\Delta x_i \to 0$, se llama volumen del cuerpo dado:

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\, \Delta x_i .$$

Puesto que v_n representa, evidentemente, la suma integral para una función continua $Q(x)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el

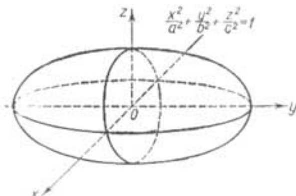


Fig. 238

límite indicado existe y se expresa por la integral definida:

$$v = \int_a^b Q(x)\, dx. \tag{1}$$

Ejemplo. Calcular el volumen de un elipsoide de tres ejes (fig. 238)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Solución. La sección del elipsoide cortado por un plano paralelo al plano Oyz que se encuentra a la distancia x de este último da una elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1,$$

sus semiejes son:

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Pero el área de tal elipse es igual a $\pi b_1 c_1$ (véase el ejemplo 3 § 2).

Por eso,

$$Q(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

De donde el volumen del elipsoide es igual a:

$$v=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

En particular, si $a=b=c$, el elipsoide se transforma en una esfera, y en este caso, obtenemos:

$$v=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 5. VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCION

Estudiemos el cuerpo de revolución engendrado por la rotación del trapecio curvilíneo $aABb$ alrededor del eje Ox. El trapecio está limitado por la curva $y=f(x)$, el eje Ox y las rectas $x=a$, $x=b$.

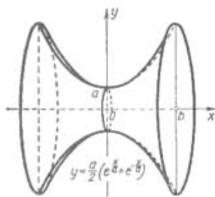


Fig. 239

En este caso, toda sección arbitraria del cuerpo, cortado por un plano perpendicular al eje de abscisas, es un círculo cuyo área es:

$$Q=\pi y^2=\pi\,[f(x)]^2.$$

Aplicando la fórmula general para el cálculo de los volúmenes [(1), § 4], obtenemos la fórmula para calcular el volumen del **cuerpo de revolución:**

$$v=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b\Big[\,f(x)\,\Big]^2dx.$$

Ejemplo. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de una catenaria

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

alrededor del eje Ox, en el intervalo desde $x=0$ hasta $x=b$ (fig. 239).

Solución.

$$v=\pi\frac{a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b=\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi a^2b}{2}.$$

§ 6. AREA DE UN CUERPO DE REVOLUCION

Sea una superficie engendrada por la revolución de la curva $y=f(x)$ alrededor del eje Ox; hallemos el área de esta superficie en el intervalo $a\leqslant x\leqslant b$. Supongamos que la función $f(x)$ es continua y tiene derivada continua en todos los puntos del segmento $[a, b]$.

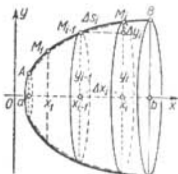


Fig. 240

Igual que en el § 3, tracemos las cuerdas AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos por Δs_1, Δs_2, . . ., Δs_n (fig. 240).

En su rotación cada cuerda de longitud Δs_i ($i=1, 2, \ldots n$) describe un cono truncado, cuya superficie ΔP_i es igual a

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta s_i.$$

Pero,

$$\Delta s_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Aplicando el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\text{ donde } x_{i-1}<\xi_i<x_i;$$

por consiguiente,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i.$$

La superficie descrita por la línea quebrada es igual a la suma

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

o a la suma

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i, \tag{1}$$

que se extiende a todos los eslabones de la línea quebrada. El límite de esta suma, cuando el eslabón más grande de la línea quebrada Δs_i tiende a cero se *llama área de la superficie de revolución.*

La suma (1) no es una suma integral para la función

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}, \tag{2}$$

puesto que en el sumando, correspondiente al segmento $[x_{i-1}, x_i]$, figuran unos cuantos puntos de este segmento: x_{i-1}, x_i, ξ_i. Sin embargo, se puede demostrar que el límite de la suma (1) es igual al de la suma integral para la función (2), es decir,

$$P = \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i$$

ó

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{3}$$

Ejemplo. Determinar la superficie del paraboloide, engendrada por la revolución alrededor del eje Ox de un arco de la parábola $y^2 = 2px$, correspondiente a la variación de x desde $x = 0$ hasta $x = a$:

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}.$$

Solución. *Según la fórmula (3) obtenemos:*

$$P=2\pi\int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx=$$

$$=2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\frac{1}{2}\Big|_0^a=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2}-p^{3/2}\right].$$

§ 7. CALCULO DEL TRABAJO CON AYUDA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Supongamos que, bajo el efecto de una fuerza F, el punto material M se desplaza a lo largo de la recta Os, y la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento. Es preciso determinar el trabajo producido por la fuerza F, para desplazar el punto M de la posición $s = a$ a la posición $s = b$.

1) Si la fuerza F es constante, el trabajo A se expresará como el producto de la fuerza F por el camino recorrido:

$$A = F(b - a).$$

2) Supongamos que la fuerza F varía continuamente en función de la posición del punto material, es decir, representa una función $F(s)$, continua en el segmento $a \leqslant s \leqslant b$.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes arbitrarias de longitudes

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n.$$

Elijamos, ahora, en cada segmento parcial $[s_{i-1}, s_i]$ un punto arbitrario ξ_i, y sustituyamos el trabajo de la fuerza $F(s)$ en el camino Δs_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ por el producto

$$F(\xi_i)\,\Delta s_i.$$

Esto significa que dentro de los límites de cada segmento parcial admitimos la fuerza F como constante es decir, $F = F(\xi_i)$. En tal caso la expresión $F(\xi_i)\,\Delta s_i$, para Δs_i suficientemente pequeño, dará un valor aproximado del trabajo de la fuerza F en el camino Δs_i, y la suma

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta s_i$$

será la expresión aproximada del trabajo de la fuerza F en todo el segmento $[a, b]$.

Es evidente que A_n representa una suma integral formada para la función $F = F(s)$ en el segmento $[a, b]$. El límite de esta suma, para máx $(\Delta s_i) \to 0$, existe y expresa el trabajo de la fuerza $F(s)$

en el camino desde el punto $s = a$ hasta el $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)\,ds \qquad (1)$$

Ejemplo 1. La compresión S de un muelle helicoidal es proporcional a la fuerza aplicada F. Calcular el trabajo de la fuerza F al comprimir el muelle 5 cm, si es preciso aplicar una fuerza de 1 kg para comprimirlo 1 cm (fig. 241).

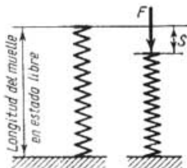


Fig. 241

Solución. Según la hipótesis, la fuerza F y el desplazamiento S están ligados por la dependencia $F = kS$, donde k es una constante. Expresemos S en metros, y F en kilogramos. Si $S = 0{,}01$ entonces $F = 1$, es decir, $1 = k \cdot 0{,}01$, de donde: $k = 100$, $F = 100S$.

En virtud de la fórmula (1) tenemos:

$$A = \int_0^{0,05} 100S\,dS = 100\,\frac{S^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 0{,}125 \text{ kgm}.$$

Ejemplo 2. La fuerza F, de repulsión entre dos cargas eléctricas e_1 y e_2 del mismo signo, dispuestas a una distancia r, se expresa mediante la fórmula

$$F = k\,\frac{e_1e_2}{r^2}$$

donde k es una constante.

Determinar el trabajo de la fuerza F para desplazar la carga e_2 desde el punto A_1, que se encuentra a la distancia r_1 de la carga e_1, al punto A_2 que se halla a la distancia r_2 de e_1. Supongamos que la carga e_1 se encuentra en el punto A_0, tomado por origen.

Solución. Según la fórmula (1) tenemos:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k\,\frac{e_1e_2}{r^2}\,dr = -ke_1e_2\,\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Para $r_2 = \infty$, obtenemos:

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{ke_1e_2}{r^2}\,dr = \frac{ke_1e_2}{r_1}.$$

Para $e_2 = 1$, tenemos $A = k\,\frac{e_1}{r}$. La última magnitud se llama *potencial del campo* creado por la carga e_1.

§ 8. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD

Sea dado en el plano Oxy un sistema de los puntos materiales

$$P_1(x_1, y_1);\quad P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n),$$

cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente.

Los productos $x_i m_i$ e $y_i m_i$ se llaman *momentos estáticos* de la masa m_1 respecto a los ejes Oy y Ox.

Designemos por x_c e y_c las coordenadas del centro de gravedad del sistema dado. Como es sabido por el curso de mecánica, las coordenadas del centro de gravedad del dicho sistema de puntos materiales se determinan por las fórmulas:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (1)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (2)$$

Utilicemos estas fórmulas, para buscar los centros de gravedad de diversos cuerpos y figuras.

1. Centro de gravedad de una curva plana. Supongamos que la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ define una curva material AB.

Sea γ la densidad *) lineal de esta curva material. Dividamos la curva en n partes de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Las masas de estas partes serán iguales a los productos de sus longitudes por la densidad (constante): $\Delta m_i = \gamma\,\Delta s_i$. Tomemos un punto arbitrario de abscisa ξ_i en cada parte de la curva Δs_i. Representando cada parte de la curva Δs_i como un punto material $P_i\,[\xi_i, f(\xi_i)]$ de masa $\gamma\,\Delta s_i$, y, sustituyendo en las fórmulas (1) y (2) x_i e y_i respectivamente por los valores ξ_i y $f(\xi_i)$ así como m_i por el valor $\gamma\,\Delta s_i$ (la masa de la parte Δs_i), obtenemos las fórmulas aproximadas para determinar el centro de gravedad de la curva:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \qquad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i)\,\gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}.$$

*) Por densidad lineal se entiende la masa de la unidad de longitud de la curva dada. Suponemos que la densidad lineal es igual en todos los puntos de la curva.

Si la función $y = f(x)$ es continua igual que su derivada, las sumas del numerador y del denominador de cada fracción, para máx $\Delta s_i \to 0$, tienen sus límites iguales a los límites de las sumas integrales correspondientes. De este modo, las coordenadas del centro de gravedad de la curva se expresan por las integrales definidas:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}, \qquad (1')$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}. \qquad (2')$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, dispuesta por arriba del eje Ox.

Solución. Hallemos la abscisa del centro de gravedad:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx, \quad x_c = \frac{a \int_{-a}^{a} \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{-a \sqrt{a^2 - x^2}\,\Big|_{-a}^{a}}{a \arcsen \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi a} = 0.$$

Determinemos, ahora, la ordenada del centro de gravedad:

$$y_c = \frac{\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx}{\pi a} = \frac{a \int_{-a}^{a} dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

2. Centro de gravedad de una figura plana. Supongamos que la figura dada, limitada por las curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, represente una figura plana material. Consideremos que la densidad superficial (es decir, la masa de una unidad de área de la superficie) es constante e igual a δ en toda la figura.

Dividamos la figura dada, mediante las líneas rectas $x = a$, $x = x_1, \ldots, x = x_n = b$ en bandas paralelas cuyas anchuras son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

La masa de cada banda será igual al producto de su área por la densidad δ. Al cambiar cada banda por un rectángulo (fig. 242) de base Δx_i, y altura $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$, donde $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, la masa de esta banda será, aproximadamente igual a:

$$\Delta m_i = \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

El centro de gravedad de esta banda se encuentra, aproximadamente, en el centro del rectángulo correspondiente:

$$(x_i)_c = \xi_i; \ (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

Sustituyendo, ahora, cada banda por un punto material y localizando la masa de cada banda en su centro de gravedad encontremos

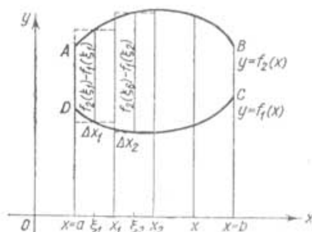


Fig. 242

el valor aproximado de las coordenadas del centro de gravedad de toda la figura (en virtud de las fórmulas (1) y (2)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i}{\sum \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]\, \delta\, [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\, \Delta x_i}{\sum \delta\, [f_2(e_i) - f_1(e_i)]\, \Delta x_i}.$$

Pasando al límite para $\Delta x_i \to 0$, obtenemos las coordenadas exactas del centro de gravedad de la figura dada:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2(x) + f_1(x)][f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}.$$

Estas fórmulas se verifican para toda figura plana **homogénea** (es decir, aquélla que tiene densidad constante en todos los **puntos**).

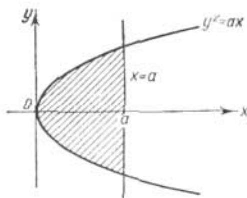


Fig. 243

Como vemos, las coordenadas del centro de gravedad no **dependen** de la densidad δ de la figura (δ se ha eliminado en el proceso **de cálculo**).

Ejemplo 2. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un segmento de parábola $y^2 = ax$, cortada por la recta $x = a$ (fig. 243).

Solución. En el caso dado: $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$; entonces:

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}\,2\sqrt{a}\,x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{5}a,$$

$y_c = 0$ (puesto que el segmento es simétrico respecto al eje Ox).

§ 9. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE UNA LINEA, DE UN CIRCULO Y DE UN CILINDRO MEDIANTE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea dado en el plano XOY un sistema de puntos materiales

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n)$$

cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Como es sabido por el curso de la mecánica, el momento de inercia del sistema de puntos materiales respecto al punto O se determina del modo siguiente:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\, m_i \tag{1}$$

ó

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i, \tag{1'}$$

donde:

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}.$$

Igual que en § 8 la curva AB está dada por la ecuación $y = f(x)$ $a \leqslant x \leqslant l$.

Supongamos que esta curva AB es una línea material y que su densidad lineal es igual a γ. Dividamos otra vez más la línea en n partes de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ donde $\Delta s_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Las masas de estas partes son iguales a los productos de sus longitudes por la densidad:

$$\Delta m_i = \gamma\,(\Delta s_i,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n).$$

Tomemos un punto arbitrario de abscisa ξ_i en cada parte de la curva. La ordenada de este punto será $\eta_i = f(\xi_i)$.

El momento de inercia de la curva respecto al punto O, en virtud de la fórmula (1), aproximadamente será

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\ \gamma \Delta s_i. \tag{2}$$

Si la función $y = f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas, entonces, para $\Delta s_i \rightarrow 0$, la suma (2) tiene límite. Este último, que se expresa mediante la integral definida, determina el momento de inercia de la línea material:

$$I_0 = \gamma \int_0^{a} [x^2 + f(x)^2] \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{3}$$

Momento de inercia de una barra homogénea de longitud l respecto a su extremo. Hagamos coincidir la barra con el segmento del eje Ox $(0 \leqslant x \leqslant l)$ (fig. 243′).

En este caso

$$\Delta s_i = \Delta x_i.$$

$$\Delta m_i = \gamma \Delta x_i, \qquad r_i^2 = x_i^2.$$

La fórmula (3) toma la forma:

$$I_{0l} = \gamma \int_0^l x^2\, dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \tag{4}$$

Dada la masa M de la barra, entonces $\gamma = \frac{M}{l}$, y la fórmula (4) toma la forma:

$$I_{0l} = \frac{1}{3} M l^2. \tag{5}$$

Momento de inercia de un anillo de radio r respecto al centro. Puesto que los puntos del anillo se encuentran a la distancia r del

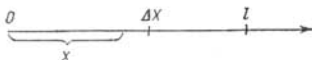


Fig. 243′

centro a, y la masa del anillo $m = 2\pi r\gamma$, el momento de inercia del anillo será:

$$I_{0a} = mr^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \tag{6}$$

Momento de inercia del círculo homogéneo de radio R respecto al centro. Sea δ la masa de una unidad del área del círculo. Dividamos el círculo en n anillos (fig. 243″).

Examinemos uno de los anillos. Sea r_i su radio interior y $r_i + \Delta r_i$ el radio exterior. La masa Δm_i de este anillo, calculada con exactitud hasta infinitesimales de orden superior respecto a Δr_i será:

$$\Delta m_i = \delta \cdot 2\pi r_i \Delta r_i.$$

En virtud de la fórmula (6) el momento de inercia de su masa respecto al centro será, aproximadamente, igual a

$$(\Delta J_0)_i \approx \delta 2\pi r_i\, \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3\, \Delta r_i.$$

El momento de inercia de todo el círculo, como el sistema de anillos, se expresará mediante la fórmula:

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i. \tag{7}$$

Pasando al límite, para máx $\Delta r_i \to 0$, obtendremos el momento

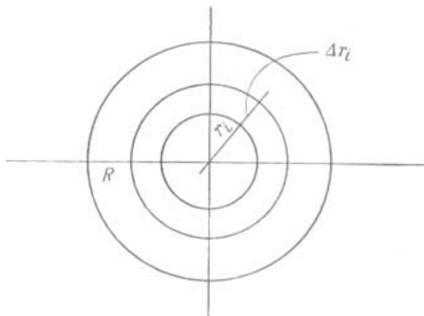


Fig. 243

de inercia del área del círculo respecto a su centro:

$$J_0 = \delta 2\pi \int_0^R r^3\,dr = \pi\delta\,\frac{R^4}{2}. \tag{8}$$

Dada la masa M del círculo, la densidad superficial δ es

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Introduciendo este valor en (8), obtenemos en definitiva:

$$I_0 = M\,\frac{R^2}{2}. \tag{9}$$

Es evidente que si tenemos un cilindro recto de radio R y masa M, entonces su momento de inercia respecto al eje se expresará por la fórmula (9).

Ejercicios para el capítulo XII

Cálculo de áreas

1. Hallar el área de la figura limitada por las curvas $y^2=9x$, $y=3x$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}$.
2. Hallar el área de la figura limitada por la hipérbola equilátera $xy=a^2$, eje Ox y rectas $x=a$, $b=2a$. *Respuesta*: $a^2 \ln 2$.
3. Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y=4-x^2$ y el eje Ox. *Respuesta*: $10\frac{2}{3}$.
4. Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Respuesta*: $\frac{3}{8}\pi a^2$.
5. Hallar el área de la figura limitada por la catenaria $y=\frac{a}{2}\times \times (e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}})$, ejes Ox y Oy, y la recta $x=a$. *Respuesta*: $\frac{a^2}{2e}(e^2-1)$.
6. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=x^3$, la recta $y=8$, y el eje Oy. *Respuesta*: 12.
7. Hallar el área del campo limitado por una semionda de la senoide y el eje de abscisas. *Respuesta*: 2.
8. Hallar el área del campo comprendido entre las parábolas $y^2=2px$, $x^2=2py$. *Respuesta*: $\frac{4}{3}p^2$.
9. Hallar el área total de la figura limitada por las curvas: $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}$.
10. Hallar el área del campo limitado por un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$, y el eje de abscisas. *Respuesta*: $3\pi a^2$.
11. Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide: $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta*: $\frac{3}{8}\pi a^2$.
12. Hallar el área total del campo limitado por la lemniscata $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. *Respuesta*: a^2.
13. Calcular el área del campo limitado por un lazo de la curva $\rho=a\operatorname{sen} 2\varphi$. *Respuesta*: $\frac{1}{8}\pi a^2$.
14. Calcular el área total del campo limitado por la cardioide $\rho=a(1-\cos\varphi)$. *Respuesta*: $\frac{3}{2}\pi a^2$.
15. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho=a\cos\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{4}$.
16. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho=a\cos 2\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{2}$.
17. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho=\cos 3\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi}{4}$.

18. Hallar el área del campo limitado por la curva $\rho=\cos 4\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Cálculo de volúmenes

19. La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

20. El segmento de la recta que une el origen de coordenadas con el punto (a, b) gira alrededor del eje Oy. Hallar el volumen del cono obtenido. *Respuesta*: $\frac{1}{3}\pi a^2 b$.

21. Hallar el volumen de un toro engendrado por la revolución del círculo $x^2+(y-b)^2=a^2$ alrededor del eje Ox (suponer que $b \geqslant a$). *Respuesta*: $2\pi^2 a^2 b$.

22. El área limitada por las líneas $y^2=2px$, y $x=a$ gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: πpa^2.

23. La figura limitada por la hipocicloide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{32\pi a^3}{105}$.

24. La figura limitada por un arco de la senoide $y=\operatorname{sen} x$, y el eje Ox gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{\pi^2}{2}$.

25. La figura, limitada por la parábola $y^2=4x$ y la recta $x=4$, gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: 32π.

26. La figura, limitada por la curva $y=xe^x$ y las rectas $y=0$, $x=1$, gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

27. La figura, limitada por un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$ y el eje Ox, gira alrededor del eje Ox. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $5\pi^2 a^3$.

28. La misma figura (del problema 27) gira alrededor del eje Oy. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $6\pi^3 a^3$.

29. La misma figura (del problema 27) gira alrededor de una recta que es paralela al eje Oy y pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$.

30. La misma figura (del problema 27) gira alrededor de una recta paralela al eje Ox y que pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $7\pi^2 a^3$.

31. Un cilindro de radio R está cortado por un plano que pasa por un diámetro de la base bajo el ángulo α respecto al plano de la base. Hallar el volumen de la parte separada. *Respuesta*: $\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha$.

32. Hallar el volumen común para dos cilindros: $x^2+y^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$. *Respuesta*: $\frac{16}{3}R^3$.

33. El punto de intersección de las diagonales de un cuadrado se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a; el plano del cuadrado permanece siempre perpendicular al plano del círculo, mientras que dos vértices opuestos del cuadrado se desplazan por una circunferencia (es evidente que durante el movimiento la magnitud del cuadrado cambia).

Hallar el volumen del cuerpo engendrado por este cuadrado movible. *Respuesta:* $\frac{8}{3}a^3$.

34. Calcular el volumen del segmento cortado de un parabaloide elíptico $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$ por el plano $x=a$. *Respuesta:* $\pi a^2\sqrt{pq}$.

35. Calcular el volumen del cuerpo limitado por los planos $z=0$, $y=0$, superficies cilíndricas $x^2=2py$, $z^2=2px$, y el plano $x=a$. *Respuesta:* $\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (en el primer octante).

36. Una recta se mueve paralelamente al plano Oyz cortando dos elipses: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, que se disponen en los planos Oxy y Oxz. Calcular el volumen del cuerpo obtenido. *Respuesta:* $\frac{8}{3}abc$.

Cálculo de longitudes de arcos

37. Hallar la longitud total de la hipocicloide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Respuesta:* $6a$.

38. Calcular la longitud del arco de una parábola semicúbica $ay^2=x^3$, a partir del origen de coordenadas hasta el punto de abscisa $x=5a$. *Respuesta:* $\frac{335}{27}a$.

39. Hallar la longitud del arco de una catenaria $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ del origen de coordenadas hasta el punto (x, y). *Respuesta:* $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\sqrt{y^2-a^2}$.

40. Hallar la longitud de un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a\times$ $\times(1-\cos t)$. *Respuesta* $8a$.

41. Hallar la longitud del arco de la curva $y=\ln x$ en los límites: de $x=\sqrt{3}$ hasta $x=\sqrt{8}$. *Respuesta:* $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

42. Hallar la longitud del arco de la curva $y=1-\ln\cos x$ entre los límites de $x=0$ a $x=\frac{\pi}{4}$. *Respuesta:* $\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

43. Hallar la longitud de la espiral de Arquímedes $\rho=a\varphi$, a partir del polo hasta el fin del primer rizo. *Respuesta:* $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+$ $+\sqrt{1+4\pi^2})$.

44. Hallar la longitud de la espiral $\rho=e^{\alpha\varphi}$ del polo al punto (ρ, φ). *Respuesta:* $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}e^{\alpha\varphi}=\frac{\rho}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}$.

45. Hallar la longitud total de la curva $\rho=a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$. *Respuesta:* $\frac{3}{2}\pi a$.

46. Hallar la longitud de la evoluta de la elipse $x=\frac{c^2}{2}\cos^3 t$; $y=\frac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t$. *Respuesta:* $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

47. Hallar la longitud de la cardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$. *Respuesta:* $8a$.

48. Hallar la longitud del arco de la evolvente del círculo $x=a(\cos\varphi+$ $+\varphi\operatorname{sen}\varphi)$, $y=a(\operatorname{sen}\varphi-\varphi\cos\varphi)$, desde $\varphi=0$ hasta $\varphi=\varphi_1$. *Respuesta*: $\frac{1}{2}a\varphi_1^2$.

Cálculo de las áreas de superficies de los cuerpos de revolución

49. Hallar el área de la superficie, obtenida por la revolución de la parábola $y^2=4ax$ alrededor del eje Ox, desde el origen O hasta el punto de abscisa $x=3a$. *Respuesta*: $\frac{56}{3}\pi a^2$.

50. Hallar el área de la superficie del cono engendrado por la revolución de un segmento de la recta $y=2x$ limitada por $x=0$, $x=2$:

a) alrededor del eje Ox. *Respuesta*: $8\pi\sqrt{5}$;

b) alrededor del eje Oy. *Respuesta*: $4\pi\sqrt{5}$.

51. Hallar la superficie del toro obtenido por la revolución del círculo x^2+ $+(y-b)^2=a^2$ alrededor del eje Ox. *Respuesta*: $4\pi^2ab$.

52. Hallar el área de la superficie del cuerpo engendrado por la revolución de una cardioide alrededor del eje Ox. Las ecuaciones paramétricas de la cardioide son: $x=a(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$, $y=a(2\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}2\varphi)$. *Respuesta*: $\frac{128}{5}\pi a^2$.

53. Hallar el área de la superficie del cuerpo obtenido por la revolución de un arco de cicloide $x=a(t-\operatorname{sen}t)$; $y=a(1-\cos t)$ alrededor del eje Ox. *Respuesta*: $\frac{64\pi a^2}{3}$.

54. El arco de la cicloide (véase el problema 53) gira alrededor del eje Oy. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $16\pi^2a^2$.

55. El arco de la cicloide (véase el problema 53) gira alrededor de la tangente paralela al eje Ox que pasa por el vértice. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta* $\frac{32\pi a^2}{3}$.

56. La astroide $x=a\operatorname{sen}^3 t$, $y=a\cos^3 t$ gira alrededor del eje Ox. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $\frac{12\pi a^2}{5}$.

57. El arco de la sinusoide $y=\operatorname{sen}x$, desde $x=0$ hasta $x=2\pi$, gira alrededor del eje Ox. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $4\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

58. La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ gira alrededor del eje Ox. Hallar la superficie del cuerpo de revolución. *Respuesta*: $2\pi b^2+2\pi ab\,\frac{\operatorname{arcsen}e}{e}$, donde $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

Diferentes aplicaciones de la integral definida

59. Hallar el centro de gravedad del área de una cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$. *Respuesta*: $\frac{4a}{3\pi}$; $\frac{4b}{3\pi}$.

60. Hallar el centro de gravedad de la figura limitada por la parábola $x^2+4y-16=0$ y el eje Ox. *Respuesta*: $\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$.

61. Hallar el centro de gravedad del volumen de la semiesfera. *Respuesta*: en el eje de simetría, a la distancia $\frac{3}{8}R$ de la base.

62. Hallar el centro de gravedad de la superficie de la semiesfera. *Respuesta*: en el eje de simetría a la distancia $\frac{R}{2}$ de la base.

63. Hallar el centro de gravedad de la superficie del cono recto circular que tiene radio de la base R y altura h. *Respuesta*: en el eje de simetría, a la dislínlas $\frac{h}{3}$ de la base.

64. Hallar el centro de gravedad de la superficie de la figura limitada por las líneas $y=\operatorname{sen} x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $y=0$. *Respuesta*: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

65. Hallar el centro de gravedad del área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. *Respuesta*: (9; 9).

66. Hallar el centro de gravedad del área de un sector circular que tiene ángulo central 2α y radio R. *Respuesta*: en el eje de simetría, a la distancia $\frac{2}{3}R\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ del vértice del sector.

67. Hallar la presión que se ejerce sobre un rectángulo sumergido verticalmente en agua, si se conoce que su base es 8 m, altura 12 m. La base superior es paralela a la superficie libre del agua y se encuentra a una profundidad de 5 m. *Respuesta*: 1056 toneladas.

68. El borde superior de una esclusa que tiene forma de cuadrado, de lado igual a 8 m, se halla en la superficie del agua. Determinar la presión que se ejerce sobre cada uno de los triángulos de la esclusa. Los triángulos se obtienen mediante la división del cuadrado por una de sus diagonales. *Respuesta*: 85 333,33 kg, 170 666,67 kg.

69. Calcular el trabajo necesario para bombear el agua de un recipiente semiesférico cuyo diámetro es igual a 20 m. *Respuesta*: $2{,}5\cdot 10^6\ \pi$kgm.

70. Un cuerpo se encuentra en movimiento rectilíneo según la ley $x = ct^3$, donde, x es la distancia recorrida durante el tiempo t, $c =$ const. La resistencia del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad, siendo k el coeficiente de proporcionalidad. Hallar el trabajo de la resistencia al desplazarse el cuerpo del punto $x=0$ hasta el $x=a$. *Respuesta*: $\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}$.

71. Calcular el trabajo que es preciso gastar para bombear el líquido de densidad γ, desde un recipiente que tiene forma de cono con vértice dirigido hacia abajo. H es la altura del cono, R es el radio de su base. *Respuesta*: $\frac{\pi\gamma R^2H^2}{12}$.

72. Una boya de madera que tiene forma cilíndrica flota sobre la superficie del agua. Se conoce que la altura H es 50 cm, el área de su base S es igual a 4000 cm². ¿Qué trabajo se necesita para sacar la boya del agua? (El peso específico de la madera es 0,8). *Respuesta*: $\frac{\gamma^2H^2S}{2}=32$ kgm.

73. Calcular la fuerza total que ejerce el agua sobre una presa en forma del trapecio equilátero cuya base superior es $a = 6{,}4$ m y la inferior, $b = 4{,}2$ m. La altura H es igual a 3m. *Respuesta*: 22,2 t.

74. Hallar la componente axial P (kg) de la presión total del vapor que se ejerce sobre el fondo esférico de una caldera. El diámetro de la parte cilíndrica de la caldera es D mm. La presión del vapor en la caldera es P kg/cm². *Respuesta*: $P=\frac{\pi PD^2}{400}$.

75. El extremo de un árbol vertical de radio r se apoya sobre un tejuelo plano. El peso P del árbol se distribuye uniformemente por toda la superficie del apoyo. Calcular el trabajo total de las fuerzas de fricción durante una revolución del árbol. El coeficiente de fricción es μ. *Respuesta:* $\frac{4}{3}\pi\mu Pr$.

76. Un árbol vertical termina en una rangua en forma del cono truncado. La presión específica de la rangua sobre el tejuelo es constante e igual a P. El diámetro superior de la rangua es D, el inferior, d. El ángulo al vértice del cono es 2α. El coeficiente de fricción, μ.

Hallar el trabajo de las fuerzas de fricción en una revolución del árbol. *Respuesta:* $\frac{\pi^2 P\mu}{6\operatorname{sen}\alpha}(D^3-d^3)$.

77. Una varilla prismática de longitud l es estirada con una fuerza que aumenta lentamente desde 0 hasta P, de modo tal que a cada instante la fuerza se equilibra por las fuerzas de elasticidad de la varilla. Calcúlese el trabajo A de la fuerza de tensión, suponiendo que el estiramiento se haya realizado en los límites de elasticidad. El área de la sección transversal de la varilla es F. El módulo de elasticidad del material es igual a E.

Indicación. Si x es el alargamiento de la varilla, y f, la fuerza aplicada correspondiente, tenemos: $f=\frac{FE}{l}x$. El alargamiento bajo el efecto de la fuerza P es $\Delta l=\frac{Pl}{EF}$. *Respuesta:* $A=\frac{P\Delta l}{2}=\frac{P^2 l}{2EF}$.

78. A una barra prismática suspendida verticalmente se le aplica una fuerza de tensión P en su extremo inferior. Calcular el alargamiento de la barra bajo la acción de su propio peso y la fuerza P, si se conocen el largo l de la barra en reposo, el área de la sección transversal F, el peso de la barra Q y el módulo de elasticidad E del material. *Respuesta:* $\Delta l=\frac{(Q+2P)\,l}{2EF}$.

79. Determinar el tiempo durante el cual se verterá el líquido de un recipiente prismático lleno hasta la altura H. El área de la sección transversal del recipiente es igual a F, el área del orificio es f. La velocidad del derrame se determina según la fórmula $v=\mu\sqrt{2gh}$, donde μ es el coeficiente de viscocidad, g es la aceleración por la fuerza de gravedad, h es la distancia del orificio al nivel de líquido. *Respuesta:* $T=\frac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}}=\frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

80. Determinar el gasto Q del agua (cantidad de agua que se derrama por unidad de tiempo) a través de un vertedero de sección rectangular. La altura del vertedero es h, el ancho es b. *Respuesta:* $Q=\frac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh}$.

81. Determinar el gasto de agua Q, que se derrama por un orificio rectangular lateral, de altura a y ancho b, si la altura de la superficie libre del agua, por arriba del borde inferior del orificio, es H. *Respuesta:* $Q=\frac{2b\mu\sqrt{2g}}{3}[H^{3/2}-(H-a)^{3/2}]$.

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

INDICE

PREFACIO

CAPITULO I. NUMERO. VARIABLE. FUNCION

CAPITULO II. LIMITE. CONTINUIDAD DE LA FUNCION

CAPITULO III. DERIVADA Y DIFERENCIAL

CAPITULO IV. TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

CAPITULO V. ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

CAPITULO VI. CURVATURA DE UNA CURVA

CAPITULO VII. NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

CAPITULO VIII. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CAPITULO IX. APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRIA DEL ESPACIO

CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA